فهرست مطالب

مقدمه

هر مساله نیازمند تصمیم‌گیری را می‌توان به عنوان یکی از انواع مساله‌های تحقیق در عملیات مطرح کرد. امروزه روش‌های متعددی برای تصمیم‌گیری وجود دارد، ولی از آنجاییکه تصمیم‌گیری سریع و صحیح می‌تواند مدیران را در اتخاذ راهکارهایی مناسب برای حل مشکلاتشان یاری نماید، شاخه‌های گوناگونی در تحقیق در عملیات به وجود آمده است، که می‌توان از آن جمله به برنامه‌ریزی خطی اشاره کرد.

در این جزوه ابتدا برخی از مفاهیم پایه را مرور می‌کنیم. سپس روش فرموله کردن مساله‌های برنامه‌ریزی خطی و روش کلاسیک حل آن ارائه می‌گردد.

تشکر و قدردانی

بدینوسیله از زحمات فراوان دانشجویانی که در یادداشت برداری و آماده‌سازی رایانه‌ای این جزوه مرا یاری داده اند، بویژه خانمها: **نرگس جهانگیر**، **زهرا شکیبائی**، **صدیقه نایفی** و آقایان: **مرتضی راستی**، **تقی رضوان قهفرخی و مسعود خزائیلی نجف‌آبادی** قدردانی می‌گردد.

بسمه تعالی

تحقیق در عملیات

تحقیق در عملیات عبارت است از کاربرد روش های تجزیه و تحلیل پیشرفته به منظور کمک به بهتر تصمیم گرفتن. یا به بیان دیگر عبارت است از بررسی عملیات یک دستگاه (سازمان) و استفاده از مدل‌های ریاضی، رایانه ای و سایر روش های تجزیه و تحلیل جهت بهبود آن. تحقیق در عملیات نوعاً به مسایل تخصیص منابع محدود بین فعالیت های رقیب در جهت یافتن بهترین راه ممکن (بهینه) مربوط می شود، به عبارت دیگر چنانچه انجام پاره ای از فعالیت ها منوط به بهره‌گیری از منابع محدودی که مورد نیاز مشترک آنهاست باشد، مسئله تخصیص منابع و در نتیجه تعیین حجم فعالیت ها مطرح خواهد شد. بنابراین، تحقیق در عملیات عبارت است از برنامه ریزی فعالیت ها به منظور به دست آوردن نتیجه "بهینه". به عبارت دیگر انتخاب روش دست یابی به نتیجه ای که با توجه به هدف مشخص مدل ریاضی بهترین گزینه باشد.

یک مدل ریاضی تحقیق در عملیات به عنوان نمایش آرمانی (ساده شده) از یک دستگاه واقعی تعریف می شود. این دستگاه ممکن است از پیش موجود باشد یا در مرحله طراحی بوده و هنوز به مرحله اجرا در نیامده باشد. در حالت اول هدف مدل، تحلیل رفتار دستگاه به منظور بهبود عملکرد آن است. در حالت دوم هدف مدل عبارت است از تعیین بهترین ساختار برای دستگاه آینده. این مدل ها برای تحلیل ریاضی مساعد هستند یعنی پیدا کردن بهترین جواب بوسیله ابزارهای مناسب ریاضی را ممکن می سازند.

تحقیق در عملیات ابزار مفیدی است هنگامی که حد اقل با یکی از موارد زیر روبرو شوید:

- اتخاذ یکی از تصمیمات پیچیده.
- وجود مشکلاتی در برخی عملیات دستگاه.
- قطعی نبودن نتایج یک تصمیم **Risk**.
- عدم بهترین استفاده از داده های موجود.
- پیشی گرفتن از رقبا.

آشنائی با مدل‌ها

آدمی چون می تواند از نتایج یک تجربه برای پیش بینی نتایج یک تجربه دیگر استفاده کند معمولاً سعی می کند قبل از یک تجربه بزرگ آن تجربه را در مقیاس کوچکتر بیازماید. برای این کار از مدلها استفاده می‌کند. انسان برای یک مورد بیرونی، مدلهای مختلفی می‌تواند خلق کند وشاید بزرگترین خلاقیت انسان، خلاقیت در گزینش مدل برای یک مورد بیرونی یا ذهنی باشد. مثلاً وقتی می گوئیم این کار مثل " آب در هاون کوبیدن است "، می خواهیم نتایج بدیهی یک مورد آشکار و مورد توافق را برای یک مورد دیگر که نتایج در مورد آن آنقدر آشکار نیست بکار ببریم. هر مدل بنا به توانی که در توضیح دادن حالت موجود یک مورد بیرونی و پیش بینی وضعیت های آینده آن دارد، معتبر است. برای هر پدیده ای در دنیای بیرونی و حتی هر پدیده و فرایندی داخل ذهن انسان می توان مدلهای مختلف و متنوعی پیشنهاد کرد و همیشه در گزینش مدل و نگرش ما به اوضاع و تفسیر آنها اختیار وجود دارد و مسئولیت ماست که به این مساله واقف بوده و در گزینش مدل، دقیق و حساس باشیم و همیشه ذکر کنیم که مدل ما شامل چه چیزهایی می شود و شامل چه چیزهایی نمیشود. یا در توضیح دادن چه مساله ای قویتر است و در توضیح دادن چه واقعیاتی ضعیف عمل می کند. همانطور که می دانیم در فیزیک برای توضیح خواص نور دو نظریه ذره ای و موجی موجود می باشد که هر کدام نقاط قوت و ضعف خودشان را دارند و از هردو استفاده می شود. همیشه باید مواظب باشیم که یک مدل را حقیقت محض تلقی نکنیم.

مدلسازی و داشتن مدل مزایایی دارد:

اساساً وقتی می گوئیم چیزی را یاد گرفته ایم که مدل ذهنی مان در مورد آن چیز دارای تناقض یا کاستی آشکار نباشد، مثلاً داشتن شکلی از جدول ضرب در ذهنمان موجب می شود بدانیم که کجاها را نمی دانیم. در واقع مدل جاهای خالیی را تعیین می کند که باید توسط یادگیری پر شوند و بدین نحو داشتن مدل به ما کمک می کند حقیقت‌جویی را سرعت بخشیم.

داشتن مدل واضح غیر ذهنی و به اشتراک گذاشتن آن با کسی دیگر زمانی که با او در حال صحبت هستیم، کمک می کند که حرف هم را بهتر بفهمیم. یعنی مدل ابزاری برای ارتباط و درک مدل ذهنی طرف مقابل و بنابرین پرهیز از سوء تفاهم ها و ناکارآمدی ها در ارتباطات می باشد. مثلاً اگر من و شما بخواهیم در مورد اقتصاد حرف بزنیم خوب است که ابتدا کلمات کلیدی مان را تعریف کنیم و این دقیقاً همان کاریست که من در حال انجام آن می باشم. درک ما از مدل کلی ذهن طرف مقابل یا به اصطلاح نگرش یا ذهنیت او به ما بسیار کمک می کند. این همان کاریست که در زندگی عادی به عهده سلام و احوال پرسی گذاشته ایم.

انواع مدلها

مدلها انواع متنوعی دارند که در اینجا به توضیح کلی آنها می پردازیم.

1- مدل ذهنی

از هر چیزی که بتوانیم فکرش را بکنیم یک مدل ذهنی در مغز ما وجود دارد. مثلا کلمه "فیل" به سرعت برق تصویری از موجودی سنگین و بزرگ را به ذهن متبادر می کند. البته گاهی مدلهای ما برای یک کلمه هیچ اشتراکی باهم ندارند مثل داستان

فیل در مثنوی معنوی. مدل ذهنی بسیار سریع شکل می گیرد و بسیار انعطاف پذیر و پویا می باشد و می دانیم هر چیز سریعی لزوماً کیفیت ندارد. مثلاً 95% از مدل ذهنی ما از یک شخص در 5 ثانیه اول دیدن او شکل می گیرد که مشخص است این مدل بیشتر از ظاهر متاثر است. چون مدل ذهنی در مورد بسیاری چیزها متلاطم و ناپایدار و دستخوش احساسات آنی می باشد، انسان سعی می کند قواعدی را بر استدلالهای خود استوار سازد تا فکر سرکش را مهار زده و در استخدام در آورد و هنگامی که به علت تنوع، کثرت یا پیچیدگی عوامل قادر به رعایت تناسب و عدالت در استدلال نیست سعی می کند افکارش را به روی کاغذ بیاورد و یا آن را بصورت کلمات و جملات بیان کند و به نحوی از یک مرجع بیرونی کمک گیرد تا قادر به تصمیم گیری درست باشد. اینجاست که مدلهای غیر ذهنی بکار می آیند.

2- مدل فیزیکی

آدمی چون می تواند از نتایج یک تجربه برای پیش بینی نتایج یک پیش بینی دیگر استفاده کند لذا سعی میکند قبل از یک تجربه بزرگ آن تجربه را در مقیاس کوچکتر بیازماید . برای این کار از مدل فیزیکی استفاده میکند. منظور از مدل فیزیکی تمام آزمایشهای فیزیکی، شیمیایی، پزشکی، کشاورزی و سایر علوم تجربی و آزمایشگاهی است که در آنها تاثیر عوامل و شرایط فیزیکی بر همدیگر سنجیده می شوند. ماکت هواپیما، یک مدل فیزیکی از هواپیمای واقعی می باشد که برای آزمودن فرضیات در مورد هواپیمای واقعی از آن استفاده میشود. این گونه مدلها برای درک بهتر دنیایی که در آن زندگی می کنیم و یا تحلیل نتایج طراحی ها و تصمیم های ما بر روی دنیای بیرونی استفاده می شوند. جمله "مشت نمونه خروار است" برای این مدلها کاربرد دارد که موجب بوجود آمدن علم آمار در مورد آنها شده است. برای پرهیز یا کاهش خطا در استفاده از اینگونه مدلها قوانین خاصی وجود دارد.

3- مدل ریاضی

مدلهای ریاضی مدلهای ذهنی‌ای هستند که دقیق بیان شده اند، و در واقع برای سازمان دهی، ارتباط و قدرت بخشیدن و افزودن دقت به مدلهای ذهنی طراحی شده اند. مدلهای ریاضی به خاطر کمّی یا مستقل از ناظر بودنشان ابزار ارتباطی خوبی هستند و دقت نتایج حاصل از یک مدل به دقت ساخت و کار کردن با آن بستگی دارد و هیچ خطای ابزاری در آزمایش با آنها وجود ندارد. تمام مدلهای ریاضی قابلیت حل دقیق ندارند. مدلهای ریاضی نیز مانند مدلهای ذهنی ممکن است هیچ مورد مشابه بیرونی و حتی هیچ تصور هندسی هم نداشته و کاملاً انتزاعی باشند.

4- مدل شبیه‌سازی

شبیه سازی رایانه، بخش مفیدی برای بسیاری از سیستم‌ها شده است. یک نمونه خوب از سودمندی استفاده از رایانه‌ها در شبیه سازی را می‌توان در حیطه شبیه سازی ترافیک شبکه جستجو کرد. به طور سنتی، مدل برداری رسمی سیستم‌ها از طریق یک مدل ریاضی بوده است باهدف یافتن راه حل تحلیلی برای مشکلات وسئوالات بوده است که پیش بینی رفتار سیستم را با استفاده از یک سری پارامترها و شرایط اولیه ممکن ساخته است .شبیه سازی رایانه‌ای اغلب به عنوان یک ضمیمه یا جانشین برای سیستم‌های مدل سازی است که در آن‌ها راه حل‌های تحلیلی بسته ساده ممکن نیست. انواع مختلفی از شبیه سازی رایانه‌ای وجود دارد که وجه مشترک همه آن‌ها در این است که تلاش

می‌کند تا یک نمونه از برنامه‌ای برای یک مدل تولید کنند که در آن امکان محاسبه کامل تمام حالات ممکن مدل مشکل یا غیر ممکن است.

5- مدل رایانه‌ای

اساساً رایانه محیطی برای پردازش مدلهای ریاضی می باشد و لفظ رایانه نیز به معنی محاسبه گر است. به علت سرعت روزافزون و هزینه رو به کاهش که رایانه‌ها برای پردازش و حل مدلهای ریاضی پیدا کرده‌اند، تعادل قبلی بین ساخت و حل مدلهای ریاضی از بین رفت. آنها مدلهای خاصی را بسیار سریع حل می کنند. چون ساخت مدل هنوز توسط انسان انجام می شود و هزینه و زمان آن تفاوت چندانی نکرده است، لذا به این نتیجه عقلانی می رسیم که بهتر است بار بیشتر را بدوش رایانه بیاندازیم و در ساخت مدل زیاد نگران حل آن نباشیم بلکه سعی کنیم هرچه می توانیم سریعتر و دقیق تر مدل کنیم. محیط های رایانه‌ای روز به روز ابزارهای بیشتری را دراختیار کاربر قرار می دهند تا کاربر بتواند برای معرفی مدل ذهنی خویش از آنها بهره گیرد. مثلا محیط اتوکد که یک محیط طراحی می باشد ابزارهایی مثل نقطه، خط، دایره، مکعب و استوانه را در اختیار کاربر قرار میدهد تا کاربر بتواند مدل ذهنی اش را در رایانه ایجاد کند. سپس اتوکد می تواند نتایجی مثل حجم، مرکز جرم و گشتاور جسم طراحی شده را ارائه دهد. شرکتهای متنوع رایانه‌ای روز به روز محیط دلپسند تری را در اختیار کاربر قرار می دهند تا او بتواند راحت تر، سریع تر و دقیق تر مدل ذهنی اش را به مدل رایانه‌ای تبدیل کند.

مزایای مدل رایانه ای (نرم افزاری)

a) سهولت ساخت

این مزیت از دو لحاظ قابل توجه است: اولاً هرچه ابزار حل مدل قویتر باشد، ساخت مدل آسانتر می شود، یعنی سرعت بالای حل شیوه های بسیار متنوع تری را برای مدل سازی در اختیار کاربر قرار می دهد. ثانیاً محیط های نرم افزاری روز به روز ابزارهای بیشتری را برای معرفی مدل و ساختن آن در اختیار کاربر قرار می دهند.

b) سهولت تغییر

تقریباً هیچ کار غیر قابل برگشتی در ساختن مدل با رایانه وجود ندارد. این همان مزیتی است که تایپ رایانه‌ای به تایپ دستی دارد.

c) انعطاف پذیری بالا و نیاز کمتر به فرضهای محدود کننده

دیگر لازم نیست برای قابل حل بودن، مدلمان را ساده کنیم. مدل ما می تواند بنا به قدرت پردازش رایانه دارای شباهت بیشتری به مدل ذهنی مان باشد.

d) سهولت آزمایش

آزمایش یک مدل رایانه‌ای یا به اصطلاح حل یا تحلیل آن در مقایسه با سایر مدلها آسان تر است. چون کارهایی مثل درست کردن محیط کنترل شده، چیدن میز، پیگیری دقیق سناریوی آزمایش و ثبت نتایج و داده ها در آن ساده شده است.

e) مهار خطای اندازه گیری

محیط دیجیتالی رایانه به هر میزان که شما بخواهید می تواند مراحل آزمایش را دقیق تر انجام دهد. اندازه گیری در آزمایشهای فیزیکی یکی از منابع اصلی خطا می باشد.

f) قبض و بسط زمان

در هنگام یک آزمایش رایانه‌ای در هر لحظه می توانیم زمان را متوقف کرده ویا سرعت آن را کمتر کنیم وحتی با هزینه ازدست دادن دقت، سرعت را بالا ببریم. در واقع در رایانه هر فرآیند و محاسبه مقداری وقت می گیرد. برای کاهش سرعت فرایندها می توانیم بین دو فرایند مقداری فرایند اضافی انجام دهیم و یا فرایند بعدی را منوط به گذشتن مقداری از زمان کنیم.

g) تکثیر رایگان

مدلهای رایانه‌ای چیزی جز اطلاعات نیستند و نگهداری و تکثیر آنها رایگان است.

ساختار مدل های ریاضی

یک مدل ریاضی شامل چهار مجموعه اساسی از عناصر می باشد:

1 – متغیرهای تصمیم گیری Decision Variables

متغیرهای تصمیم گیری $x_1, x_2, \ldots, x_n$ مجهول هایی هستند که با مشخص شدن آنها مسأله حل می شود.

2 – قیود یا محدودیت ها Constraints

منابع محدود و شرایط خاص حاکم بر مسأله را که به صورت روابط ریاضی (کوچکتر یا مساوی، بزرگتر یا مساوی، مساوی) مطرح می شود قیود یا محدودیت ها می گویند.

3 – تابع هدف Objective Function

تابع هدف تابعی است که میزان سودمندی دستگاه را به صورت تابعی ریاضی از متغیرهای تصمیم گیری دستگاه تعریف می کند.

4 – پارامترها

پارامترها ضرایب عددی مختلفی می باشند که در ساختن محدودیت ها و تابع هدف مورد استفاده قرار می گیرند.

مواردی که در مدل سازی باید به آنها توجه کنیم:

1 – مشخص کردن مجهولات و نام گذاری آنها بوسیله متغیرها.

تذکر: در تعریف مجهولات مسأله نباید نگران زیاد بودن تعداد آنها باشیم.

2 – یافتن تابع هدف و محدودیت های حاکم بر مسأله و نوشتن آنها به صورت ریاضی.

3 – تجزیه و تحلیل مدل و تعیین مقادیر مجهول.

برای درک موارد مذکور به مثال زیر توجه کنید:

مثال 1) شرکتی دو نوع پنجره تولید می کند نوع اول با چارچوب آلومینیومی و نوع دوم با چارچوب چوبی. ساخت پنجره چوبی در کارگاه 1 و ساخت پنجره آلومینیومی در کارگاه 2 و جایگذاری شیشه و مونتاژ پنجره ها در کارگاه 3 انجام می گیرد. این شرکت با توجه به اطلاعات جدول ذیل در یک دوره کاری از هر نوع پنجره چند عدد تولید کند تا به حداکثر سود خود برسد؟

	ساعات مورد نیاز برای هر دسته		حداکثرزمان موجود بر حسب ساعت در روز
	پنجره آلومینیومی	پنجره چوبی	
کارگاه 1	0	1	4
کارگاه 2	2	0	12
کارگاه 3	2	3	18
سود هر دسته	5000	3000	

ابتدا مجهولات مسئله را مشخص می کنیم که در اینجا تعداد پنجره های آلومینومی و چوبی می باشد.

تعداد دسته پنجره چوبی تولیدی در روز: x_1

تعداد دسته پنجره آلومینیومی تولیدی در روز: x_2

مقدار سود حاصله در روز (برحسب 1000) = z

مقدار **z** هم برای ما مجهول است ولی با مجهولات x_1 و x_2 متفاوت است چون x_1 و x_2 متغیرهای مستقل هستند ولی **z** یک متغیر وابسته است.

مدل این مسئله به شکل ذیل خواهد بود :

$$
\begin{aligned}
&Maximize\ z = 3x_1 + 5x_2 \\
&Subject\ to: \\
&x_1 \le 4 \\
&2x_2 \le 12 \\
&3x_1 + 2x_2 \le 18 \\
&x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

حال این سوال پیش می آید که چگونه مدل را تجزیه و تحلیل کنیم تا به جواب بهینه برسیم؟ برای مسائل 2 یا 3 متغیره می توان از روش ترسیمی استفاده کرد.

حل ترسیمی

در حل ترسیمی ابتدا باید با توجه به محدودیت های مسئله فضای قابل قبول مسئله را مشخص کنیم که به این مجموعه فضای قابل قبول، فضای موجه یا شدنی گوییم (**feasible region**). مسئله بسیار کوچک فوق فقط دارای دو متغیرتصمیم است و بنابراین فقط دو بعد دارد لذا برای حل آن می توان از شیوه ترسیمی استفاده کرد. این شیوه مستلزم رسم یک شکل دو بعدی با محور های x_1،x_2 است. ابتدا باید مقادیر (x_1،x_2) را با توجه به محدودیت ها تعیین نمود. این عمل با رسم خطوطی که مقادیر مجاز و غیر مجاز را از هم جدا می کنند صورت می گیرد.

در این مسئله محدودیت های غیر منفی $x_1 \ge 0$ و $x_2 \ge 0$ باعث می شوند که مقادیر (x_1،x_2) در ربع اول قرار گیرند.

برای راحتی کار نامعادله را به معادله تبدیل می کنیم و معادله ی خط مربوطه را رسم می کنیم و بعد با توجه به محدودیت، یکی از دو طرف خط را انتخاب می کنیم.

برای محدودیت اول مسئله $x_1 \le 4$ را به معادله ی $x_1=4$ تبدیل کرده و خط $x_1=4$ را رسم می کنیم چون محدودیت به شکل ($\le$) است سمت چپ خط را در نظر می گیریم.

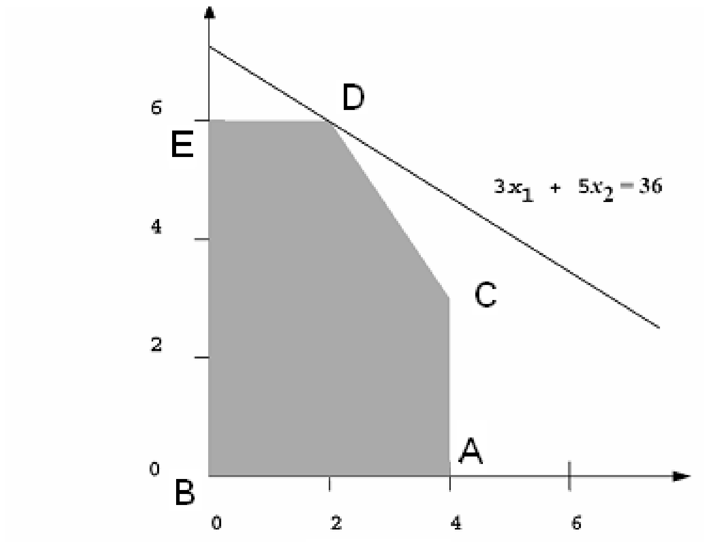
با رسم خطوط محدودیت های مذکور به ناحیه تیره ذیل می رسیم. مرزهای منطقه، خطوط مذکور می باشند. این ناحیه که مقادیر مجاز x_1 و x_2 را نشان می دهد فضای شدنی، فضای موجه یا فضای قابل قبول نامیده می شود.

حال باید نقطه ای را بیابیم که علاوه بر قرار داشتن در منطقه قابل قبول مقدار **z** را حداکثر نماید.

برای یافتن نقطه ای که جواب بهینه است یعنی **z** را به حداکثر مقدار خود می رساند از روش ترسیمی استفاده میکنیم.

ابتدا به **z** یک مقدار دلخواه نسبت داده و خط معادله آن را رسم می کنیم. به عنوان مثال $z = 15$ می بینیم که تعداد زیادی از نقاط مجاز بر روی این خط قرار می گیرند. بنابر این مقادیر بیشتری را به **z** می دهیم تا سرانجام خطی را بیابیم که موازی با دیگرخطوط **z** بوده و

- یا تنها یک نقطه از فضای قابل قبول روی آن قرار داشته باشد به عبارت دیگر این خط در آن نقطه بر منطقه قابل قبول مماس شده باشد که در اینصورت مساله جواب بهینه یگانه دارد.
- یا خط **z** بر روی یکی از محدودیت ها قرار گیرد که در اینصورت مساله بینهایت جواب بهینه دارد.



شکل ۱-۱

در مسأله مذکور این نقطه یگانه (6 و 2) = **D**خواهد بود و مقدار **z** در این نقطه برابر 36 می باشد. یعنی اینکه شرکت در و پنجره سازی از محصولات 1 و 2 باید به ترتیب 2 و 6 دسته در ساعت تولید نماید که با این تولید سود شرکت در هر ساعت 36000 دلار خواهد شد. ما از حل ترسیمی می خواهیم به حل جبری برسیم در این راستا سوالاتی پیش می آید. اگر مسئله جواب بهینه داشته باشد این جواب کجاست؟ در این مثال جواب بهینه یک راس یا یک نقطه گوشه ای است. این سوال مطرح می شود که آیا **همیشه جواب بهینه یک نقطه ی گوشه ای است؟ خوشبختانه این یک اصل است. این اصل فضای جواب را از یک فضای غیر قابل شمارش به یک فضای شدنی قابل شمارش محدود می کند.**

قضیه: **هر مدل خطی اگر جواب بهینه داشته باشد حداقل یک نقطه گوشه ای آن جواب بهینه مسئله است.** اثبات از طریق برهان خلف : فرض کنیم که جواب بهینه یک نقطه گوشه ای نباشد مثلاً یک نقطه داخلی مانند نقطه **t** باشد. لذا در شکل 1-1 یک نقطه داخلی دلخواه **t** در نظر بگیرید و یک خط دلخواه از نقطه **t** چنان عبور دهید که این خط مرز مجموعه قابل قبول را در نقاطی مانند **u** بر روی ضلع **EB** و **v** بر روی ضلع **CA** قطع کند با توجه به فرض بهینه بودن نقطه **t** داریم: $z_t \ge z_x$ که **x** می تواند هر نقطه شدنی باشد. حال چه رابطه ای بین z_u، z_v وجود دارد؟ اگر z_v **با** z_u برابر نباشد فرض بهینه بودن نقطه **t** باطل می شود. اگر z_v **با** z_u برابر باشد مستلزم این است که با z_t نیز برابر باشد. یکی از نقاط **u**، **v** را انتخاب می کنیم مثلاً **u** و آن را با دو نقطه گوشه ای **B, E** مورد مقایسه قرار می دهیم که در این جا اگر z_u برابر با z_B و z_E باشد که به یک نقطه گوشه ای رسیده ایم و اگر $z_E < z_u < z_B$ یا $z_E > z_u > z_B$ پس نقطه ای یافته ایم که **z** آن از z_u بیشتر است که تناقض است و فرض خلف باطل است.

تعاریف:

جواب: هر مقداری که به x_1 و x_2 داده شود آنگاه **x** حاصل را یک جواب گویند.

جواب قابل قبول: یک جواب مسئله یک جواب قابل قبول است اگر در تمام محدودیت ها صدق کند.

هر جواب می تواند قابل قبول یا غیر قابل قبول باشد. بعنوان مثال در مسئله مذکور (100و100) = **x** یک جواب غیر قابل قبول و **(2, 2) = x** یک جواب قابل قبول می باشد.

فضای شدنی: مجموعه نقاط قابل قبول می باشد.

جواب بهینه: از بین جوابهای قابل قبول،این جواب، بهترین مقدار **z** را داراست.

نقطه گوشه ای: نقطه ای است که از برخورد دو یا چند محدودیت بدست می آید.

مجاور بودن: دو نقطه گوشه ای مجاورند اگر پاره خطی که آن دو را به هم وصل می کند در لبه فضای قابل قبول قرار داشته باشد.

مجموعه محدب: مجموعه ای است که اگر هر دو نقطه آن را با یک پاره خط به یکدیگر وصل کنیم پاره خط مذکور نیز داخل مجموعه قرار گیرد.

برای یافتن بهترین جواب هر مساله ابتدا مقدار تابع هدف را به ازاء نقاط گوشه ای فضای شدنی به دست می آوریم و سپس بهترین آنها را بعنوان بهترین جواب مسئله مورد نظر انتخاب میکنیم. در فضای **n** بعدی که نقاط مجاور زیادند چک کردن تمام نقاط مجاور کاری دشوار است لذا از قضیه 2 میتوان استفاده کرد.

قضیه 2: اگر یک نقطه گوشه ای نسبت به نقاط گوشه ای مجاورش وضعیت بدتر نداشته باشد آن نقطه گوشه ای بهینه است.

اگر در بررسی نقاط گوشه ای فضای قابل قبول، به نقطه ای رسیدیم که وضعیت آن نقطه در مقایسه با نقاط گوشه ای قابل قبول مجاورش بدتر نیست. آن نقطه بهترین جواب مسئله مورد نظر می باشد. در فضای **n** بعدی که نقاط مجاور زیادند و چک کردن تمام نقاط مجاور کاری دشوار است، کافی است "جهت حرکت" بررسی شود اگر "یک جهت نا مطلوب بود" دیگر بررسی نقطه گوشه ای مجاور در آن جهت لزومی ندارد. ولی اگر "جهت حرکت مطلوب بود" به سراغ نقطه گوشه ای مجاور در آن جهت مطلوب می رویم و اگر هیچ جهتی مطلوب نباشد آن نقطه خود یک نقطه بهینه است. این شیوه بررسی را ***کارا*** گویند.

در مدل خطی اگر جوابی، جواب بهینه محلی باشد، جواب بهینه عمومی نیز خواهد بود. برای یافتن جواب بهینه محلی کافی است بتوانیم یک همسایگی اطراف نقطه مورد نظر پیدا کنیم بطوریکه وضعیت آن نقطه از دیگر نقاط قابل قبول آن همسایگی بدتر نباشد. بعنوان مثال در مورد نقطه $\mathbf{C} = (\,3$ و $4\,)$ نمی توانیم یک همسایگی با ویژگی مذکور پیدا کنیم زیرا اگر روی یال متصله به سمت نقطه $\mathbf{D}$ حرکت کنیم مقدار $\mathbf{z}$ بهبود می یابد و مرتباً به مقدار آن افزوده می شود. در نتیجه نقطه $\mathbf{C}$ نمی تواند جواب بهینه مسئله باشد.

در مدل خطی، فضای قابل قبول ما همواره یک مجموعه محدب است. یعنی اگر فضای قابل قبول ما یک مجموعه محدب نباشد مدل ما خطی نخواهد بود.

تحلیل حساسیت به روش ترسیمی

یک مدل خطی باید ویژگی های خاصی را داشته باشد که عبارتند از تناسب، جمع پذیری، قطعی بودن و پیوسته بودن. اما اگر شرایط یک مسأله مرتب در حال تغییر باشد چه باید کرد؟ برای مثال قیمت ها افزایش یابند و منابع تغییر کنند و غیره. یعنی اگر ضرایب x_1 و x_2 در مدل تغییر کرد چه کنیم و چگونه با این تغییرها برخورد کنیم. برای این کار از « تحلیل حساسیت » استفاده می کنیم. تحلیل حساسیت (آنالیز حساسیت) به ماکمک می کند تا با توجه به آن تغییرات به سؤال هایی از قبیل زیر پاسخ دهیم:

1 – با وجود تغییر در مقادیر سمت راست محدودیت ها تا کی محدودیت های فعلی تعیین کننده سیاست بهینه باقی می مانند؟

2 – با وجود تغییر در ضرایب تابع هدف تا کی روند فعلی تولید ادامه داشته باشد تا علی رغم این نوسانات سود بهینه را داشته باشیم؟

با فرض غیرمنفی بودن کلیه b_i ها مدل زیر شکل عمومی یک مدل خطی استاندارد را نشان می‌دهد.

$$
\begin{aligned}
&Maximize\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\
&Subject\ to: \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
&\quad \vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m \\
&x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \dots, x_n \ge 0
\end{aligned}
$$

بعنوان نمونه در مثال مذکور $n = 2$ ، $m = 3$ ، $c_1 = 3$ ، $c_2 = 5$ ، $b_1 = 4$ ، $b_2 = 12$ و $b_3 = 18$ می‌باشد.

a_{ij}ها را ضرایب تکنولوژی می گویند زیرا با تغییر تکنولوژی این ضرایب هم می توانند تغییر کنند.

اگر در یک مدل عمومی همه ضرایب و مقادیر به استثنای c_1 ثابت باشند می خواهیم مشخص کنیم c_1 در چه دامنه ای می تواند تغییر کند تا همان جواب (سیاست) بهینه قبل از تغییر، جواب بهینه باقی بماند. همین طور روی b_i ها.

در تحلیل حساسیت ابتدا تغییرات را انفرادی بررسی می کنیم.

در ضمن اگر مسأله کوچک باشد با تغییر هر کدام از c_j ها و b_i ها می توانیم دوباره از نو مسأله را حل کنیم ولی اینکار مطلوب ما نیست.

تحلیل حساسیت بعد از بدست آوردن جواب بهینه انجام می شود.

منظور از تحلیل حساسیت بررسی تأثیر تغییرات محتمل پارامترها بر روی جواب بهینه است.

تغییراتی که معمولاً در مدل برنامه ریزی خطی مورد مطالعه قرار می گیرند شامل موارد زیر است.

1 – تغییر در ضرایب تابع هدف

2 – تغییر در اعداد سمت راست محدودیت ها.

1 – تعیین دامنه تغییرات ضرایب تابع هدف به روش ترسیمی:

تغییر در ضرایب تابع هدف در شیب خط تابع هدف اثر می گذارد. این تغییرات اگر از یک میزان مشخص بیشتر شود می تواند نقطه بهینه را تغییر دهد.

همانطور که قبلاً ذکر شد تابع هدف در بهترین مقدار خود از نقطه (نقاط) بهینه عبور می کند و نقطه گوشه بهینه نیز همانند دیگر نقاط گوشه ای از برخورد حداقل دو محدودیت بوجود آمده است. در روش ترسیمی تحلیل حساسیت، گفته می شود مقدار تابع هدف در نقطه بهینه نباید از مقدار تابع هدف در نفاط گوشه ای مجاورش بدتر باشد.

بعنوان مثال اگر بخواهیم دامنه تغییرات c_1 را محاسبه کنیم باید ابتدا بقیه پارامترهای مسأله را ثابت در نظر گرفته و قرار دهیم:

$$z(D) = 2c_1 + 30 \geq z(C) = 4c_1 + 15 \rightarrow c_1 \leq 7.5$$
$$z(D) = 2c_1 + 30 \geq z(E) = 30 \rightarrow c_1 \geq 0$$
$$\therefore 0 \leq c_1 \leq 7.5 \Rightarrow Minimum\ \Delta c_1 = -3 \leq \Delta c_1 \leq 4.5 = Maximum\ \Delta c_1$$

به طریق مشابه $c_2 \geq 2$. اگر میزان تغییر در c_2 دربازه مذکور باشد پایه بهینه تغییر نخواهد کرد.

حال در فضای **n** بعدی، فرض کنید چند ضریب بطور همزمان تغییر کنند. برای اینکه تأثیر آنها را بر جواب بهینه بررسی کنیم از رابطه زیر استفاده می کنیم.

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\left|\frac{\Delta c_j \mid \Delta c_j > 0}{Maximum\ \Delta c_j}\right| \quad or \quad \left|\frac{\Delta c_j \mid \Delta c_j < 0}{Minimum\ \Delta c_j}\right|\right) = k$$

که $Maximum\ \Delta c_j (Minimum\ \Delta c_j)$ برابر است با حداکثر مجاز تغییر مثبت (منفی) Δc_j مشروط بر اینکه پایه بهینه تغییری نکند. حال اگر $k \leq 1$ باشد پایه بهینه تغییری نمی کند در غیر این صورت از این روش نمی توان در مورد تغییر پایه بهینه داوری کرد.

بعنوان مثال برای تغییرات همزمان و دلخواه c_1 و c_2 زیر داریم:

$$c:(3,5) \rightarrow c':(4,4) \Rightarrow \Delta c_1 = 1 \,\&\, \Delta c_2 = -1$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\left|\frac{\Delta c_j \mid \Delta c_j > 0}{Maximum\ \Delta c_j}\right| \quad or \quad \left|\frac{\Delta c_j \mid \Delta c_j < 0}{Minimum\ \Delta c_j}\right|\right) = \left|\frac{4-3}{4.5}\right| + \left|\frac{4-5}{-3}\right| = \left|\frac{1}{4.5}\right| + \left|\frac{-1}{-3}\right| = \tfrac{5}{9} < 1$$

لذا پایه بهینه تغییری نمی کند.

2 – تعیین دامنه تغییرات اعداد سمت راست محدودیت ها به روش ترسیمی:

هدف در تحلیل حساسیت اعداد سمت راست، تعیین دامنه تغییراتی برای عدد سمت راست یک محدودیت مشخص است با این شرط که سایر ضرایب مدل تغییر نکرده و فهرست متغیرهای پایه بهینه نیز تغییر نکند.

این روش را با استفاده از مثال 1 توضیح می دهیم:

برای یافتن دامنه تغییرات b_1 تا زمانی که محدودیت های 2 و 3 تعیین کننده نقطه بهینه باشند به طریق زیر عمل می کنیم.

اگر محدودیت 1 به موازات خودش به سمت راست حرکت کند تأثیری در جواب بهینه ندارد. اگر آن را تا حدی به سمت راست ببریم که از نقطه (0 و 6) عبور کند منطقه قابل قبول افزایش می یابد و از ان نقطه به بعد هر مقدار افزایش b_1 هیچگونه تأثیری در تعیین نقطه بهینه و منطقه قابل قبول ندارد.

از طرف دیگر محدودیت 1 را تنها تا زمانی می توان به سمت چپ هدایت کرد که از نقطه (6 و 2) عبور کند و بعد از آن پایه بهینه تغییر کرده و جواب بهینه مسأله از تلاقی محدودیت های 1 و 2 ایجاد خواهد شد. بنابراین دامنه تغییرات b_1 برابر است با $b_1 \geq 2$.

تعیین دامنه تغییرات b_2 و b_3به عنوان تمرین به دانشجو واگذار می شود .

در اینجا ممکن است چند تا از b_i ها همزمان تغییر کنند.

اگر رابطه زیر برای آنها برقرار بود پایه بهینه تغییری نمی کند.

$$\sum_{i=1}^{m}\left|\frac{\Delta b_i}{Maximum\ \Delta b_i}\right| = k$$

که $Maximum\ \Delta b_i$ برابر است با حداکثر مجاز تغییر در همان جهت تغییر Δb_i مشروط بر اینکه پایه بهینه تغییری نکند. حال اگر $k \leq 1$ باشد پایه بهینه تغییری نمی کند در غیر این صورت از این روش نمی توان در مورد تغییر پایه بهینه داوری کرد.

مثال:

$$b = (4, 12, 18) \qquad b' = (3, 10, 20)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{6}\right)+\left(\frac{2}{6}\right) \geq 1$$

پس از این راه نمی توان قضاوت کرد که همان محدودیت های 2و3 تعیین کننده جواب بهینه اند یا نه.

$$b'' = (5, 3, 15) \quad \left(\frac{1}{\infty}\right)+\left(\frac{2}{6}\right)+\left(\frac{2}{6}\right) = 1$$

با این تغییرات جواب بهینه هنوز با استفاده از این محدودیت های 2و3 تعیین می شود.

گفتیم که یک نقطه گوشه ای از تلاقی محدودیت ها بوجود می آید.بعضی از نقاط گوشه ای قابل قبول نیستند برای حل یک مدل باید از یک نقطه گوشه ای قابل قبول شروع کنیم.

در جبر برای تشخیص یک نقطه گوشه ای از قضیه زیر استفاده می کنیم

قضیه: یک نقطه گوشه ای است اگر و فقط اگر آن نقطه یک جواب پایه باشد.

حال این سؤال مطرح می شود که چه جوابی پایه است؟ در مثال 1 پس از تبدیل نامعادلات به معادلات به کمک متغیرهای کمبود، از پنج متغیر مسأله دو متغیر را به دلخواه انتخاب و مقدار آنها را صفر قرار می دهیم و سپس سیستم معادلات را برای

بدست آوردن مقدار بقیه متغیرها حل میکنیم. آنگاه جوابی که به دست می آید یک جواب پایه است. برای راحتی کار، ابتدا متغیر های اصلی را صفر می کنیم یعنی از مبدأ فضای مورد نظرشروع می کنیم. سپس در این روش برای یافتن جواب پایه بهینه ابتدا جهت های مطلوب را پیدا می کنیم. اگر در یک نقطه گوشه ای جهت مطلوبی برای حرکت موجود است آن نقطه بهینه نخواهد بود. برای تعیین مطلوب یا نامطلوب بودن جهت حرکت می توان "تغییر مقدار تابع هدف" را به ازای یک واحد حرکت در جهت موردنظر محاسبه کرد. اگر این تغییر مقدار تابع هدف مطلوب باشد آن جهت مطلوب است. اگر این تغییر مقدار تابع هدف نامطلوب باشد آن جهت نیز نامطلوب است. اگر چند جهت مطلوب باشد آن جهتی انتخاب می شود که به ازای یک واحد حرکت به سمت آن مقدار مطلوبیت بیشتر باشد. ما امیداواریم با انتخاب ان مسیر زودتر به جواب بهینه دست یابیم (البته تضمینی برای تحقق آن نیست).

متغیرها به دو دسته تقسیم می شوند:

1 – متغیرهای غیر پایه: متغیرهایی که ما به دلخواه انتخاب و به آنها مقدار صفر می دهیم.

2 – متغیرهای پایه: مابقی متغیرها را متغیرهای پایه می نامیم.

روش سیمپلکس (سادک):

روش سیمپلکس همواره از یک جواب پایه ای شدنی شروع می کند و آنگاه برای یافتن جواب پایه ای شدنی دیگری که مقدار تابع هدف را بهتر خواهد کرد کوشش می کند.

این امر زمانی امکان پذیر است که افزایش مقدار یکی از متغیرهای غیرپایه کنونی مطلوب باشد. که در اینصورت یکی از متغیرهای پایه کنونی باید کنار گذاشته شود (غیر پایه شود) تا "تعداد متغیرهای پایه" ثابت باشد.

در روش سیمپلکس متغیرغیر پایه انتخاب شده متغیرورودی و متغیرپایه کنار گذاشته شده متغیرخروجی نام دارد.

قواعد انتخاب متغیرهای ورودی و خروجی به مطلوب بودن جهت و شدنی بودن بستگی دارند. این شرایط و به دنبال آن مراحل روش سیمپلکس را بیان می کنیم:

اگر در معادله تابع هدف سمت راست را به سمت چپ ببریم آنگاه شرط مطلوب بودن جهت برای مسائل بیشینه سازی داشتن ضرایب منفی در سطر تابع هدف برای متغیرهای غیر پایه است . اگر جهت مطلوب منحصر به فرد نباشد می توان منفی ترین یا یک جهت مطلوب را به دلخواه انتخاب کرد. وقتی تمام ضرایب متغیرهای غیر پایه ای در سطر **z** نامنفی باشند جهت مطلوب وجود ندارد و شرط بهینگی حاصل شده است.

شرط شدنی بودن برای هر دو مساله بیشینه سازی و کمینه سازی آنست که متغیرخروجی از پایه متناظر با کوچکترین نسبت مثبت باشد. اگر کوچکترین نسبت مثبت منحصر به فرد نباشد یکی به دلخواه انتخاب می شود. نسبت مثبت هر محدودیت عبارتست از تقسیم مقدار ثابت فعلی سمت راست آن محدودیت بر ضریب مثبت متغیر ورودی در آن محدودیت.

مراحل روش سیمپلکس عبارتند از:

مرحله 0) یک جواب پایه ای شدنی ابتدایی را تعیین کنید.

مرحله 1) با استفاده از شرط جهت مطلوب یک متغیرورودی انتخاب کنید. اگر متغیرورودی وجود ندارد توقف کنید.

مرحله 2) با رعایت شرط شدنی بودن یک متغیرخروجی انتخاب کنید.

مرحله 3) با استفاده از عملیات سطری جواب پایه شدنی جدید را تعیین کنید و به مرحله یک بروید.

جدول سیمپلکس

برای راحتی و کارایی در محاسبات روش سیمپلکس به طریق دستی از جدولی که به آن جدول سیمپلکس می گویند استفاده می شود.

روش حل مسائل به شکل استاندارد:

در مسائل شکل استاندارد ابتدا باید با اضافه کردن متغیرهای کمکی نامعادلات را به معادلات تبدیل کرد. سپس در تابع هدف و محدودیت ها، متغیرهای تصمیم به سمت چپ تساوی منتقل می شوند.

انجام عملیات فوق برای مسأله 1 وضعیت زیر را ارائه می کند.

$$z-3x_1-5x_2=0$$
$$x_1+s_1=4$$
$$2x_2+s_2=12$$
$$3x_1+2x_2+s_3=18$$
$$x_1\geq 0, x_2\geq 0, s_1\geq 0, s_2\geq 0, s_3\geq 0$$

با انجام عملیات فوق مسأله برای ورود به جدول سیمپلکس مهیا می گردد.

حال با مقدمات فوق به حل مساله در و پنجره سازی مطرح شده در فصل **1** می پردازیم:

مسأله مثال 1 را در نظر بگیرید بعد از اضافه کردن متغیرهای کمکی به مسأله، داده های آن را می‌توان به شکل زیر در جدول سیمپلکس وارد کرد

پایه	مقدار	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
Z	0	-3	-5	0	0	0
s_1	4	1	0	1	0	0
s_2	12	0	2	0	1	0
s_3	18	3	2	0	0	1

در این جدول ضرایب x_1,x_2 در تابع هدف منفی هستند. این امر نشان می دهد که جهت های x_1,x_2 مطلوب هستند. پس به سادگی می توان جهت مطلوب را تشخیص داد و نیازی نیست که در هر جهت یک واحد پیش رویم. می توان برای ورود به پایه آنکه ضریب آن منفی تر است را در نظر بگیریم.

اگر جهت مطلوب x_2را انتخاب کنیم به x_2 متغیر ورودی به پایه گوئیم.

متغیرهای کمبود همواره باید غیرمنفی باشند تا ما جواب قابل قبول داشته باشیم پس x_2 حداکثر می تواند تا 6 افزایش یابد:

$$2x_2 + s_2 = 12 \qquad \frac{12}{2} = 6$$

$$2x_2 + s_3 = 18 \qquad \frac{18}{2} = 9$$

ستون مربوط به x_2 را ستون لولا گوییم.

در ستون لولا باید به ضرایب مثبت توجه کنیم و سپس نسبت های بالا را تشکیل دهیم. هر کدام که نسبت کمتری داشت سطر لولای ماست.

عنصر چرخش لولائی (چرخشی) عنصری است که از تقاطع سطر و ستون لولا به دست می آید و ما می خواهیم که با انجام عملیات سطری عنصر چرخشی یکه شود.

متغیرهای پایه (اساسی) در تمامی جداول بایستی یکه باشند یعنی در سطر خود (سطری که آن متغیر اساسی در آن واقع شده) ضریب 1+ و در بقیه سطرها ضریب صفر داشته باشند. جدولی که تمامی متغیرهای پایه آن یکه باشد جدول متعارف نامیده می شود.

برای این که ببینیم نقطه بدست آمده یک نقطه بهینه است یا نه به ضرایب جدول جدید در تابع هدف نگاه می کنیم. اگر ضرایب متفاوت بودند یعنی برخی مثبت و برخی منفی این نقطه، نقطه بهینه نمی باشد.

جهت مطلوب مربوط به آن متغیری است که ضریب اش در سطر تابع هدف جدول متعارف منفی باشد.

با توجه به توضیحات فوق عملیات یکه سازی x_2 را در ستون لولا انجام می دهیم:

پایه	مقدار	x1	x2	s1	s2	s3
z	30	-3	0	0	$\frac{5}{2}$	0
s1	4	1	0	1	0	0
x2	6	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0
s3	6	3	0	0	-1	1

حال **x_1** ستون لولای ماست لذا نسبت ها را تشکیل می دهیم و کمینه را در نظر می گیریم.

s_3 خروجی از پایه و در اینجا عنصر چرخش لولا **3** است.

عملیات یکه سازی **x_1** را در ستون لولا انجام می دهیم:

پایه	مقدار	x1	x2	s1	s2	s3
z	36	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1
s1	2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x2	6	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0
x1	2	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

حال در جدول فوق چون در سطر تابع هدف همه ضرایب غیرمنفی هستند اگر **s_2** یا **s_3** افزایش یابد در هر حالت **z** کاهش می یابد. پس در این حالت جهت مطلوب نداریم لذا نقطه (6،2) یک نقطه بهینه است با $z^* = 36$

تحلیل حساسیت به روش جبری

1. تعیین دامنه تغییرات ضرایب تابع هدف

اگر c_j به $c_j + \Delta c_j$ تغییر کند ولی ما همان عملیاتی که منتهی به جدول بهینه شد را مو به مو به همان صورت قبلی تکرار کنیم آنگاه در جدول بهینه نیز $\bar{c}_j$ به $\bar{c}_j - \Delta c_j$ تغییر می کند و حال:

الف) اگر متغیر x_j در جدول بهینه یکی از متغیرهای پایه باشد در اینصورت تنها تغییری که در جدول بهینه ایجاد می شود این است که در سطر تابع هدف مقدار $-\Delta c_j$

ظاهر می شود. در اینصورت جدول از حالت متعارف خارج شده و لازم است پس از متعارف کردن برای تعیین دامنه Δc_j شرط بهینگی را در آن جدول برقرار کنیم.

ب) اگر متغیر مذکور در جدول بهینه غیر پایه باشد.

در این حالت مقدار $-\Delta c_j$ به عدد موجود در سطر تابع هدف اضافه شده پس از آن شرط بهینگی بررسی می گردد.

2 . تعیین دامنه تغییرات اعداد سمت راست.

برای تعیین دامنه تغییرات b_i ها، مراحل زیر را انجام می دهیم.

1. متغیر پایه متناظر با آن را در جدول اولیه پیدا می کنیم.

2. ستون متناظر با آن متغیر را در جدول بهینه در مقدار Δb_i ضرب کرده با ستون مقادیر جمع می کنیم.

3. برای مقادیر کنونی ستون مقادیر شرط تعلق را بررسی می کنیم

4. از اشتراک بازه های بدست آمده دامنه تغییرات Δb_i بدست می آید.

در مثال 1 برای تعیین دامنه تغییرات c_1 و b_1 به صورت زیر عمل می کنیم.

الف) دامنه تغییرات c_1:

چون متغیر x_1 در جدول نهایی یک متغیر پایه است مانند قسمت الف عمل می کنیم پس از انجام اعمال یاد شده به جدول زیر می رسیم.

پایه	مقدار	x1	x2	s1	s2	s3
z	$36+2\Delta c_1$	0	0	0	$\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\Delta c_1$	$1+\frac{1}{3}\Delta c_1$
s1	2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x2	6	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0
x1	2	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

برای داشتن یک جدول بهینه لازم است روابط زیر برقرار باشد:

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\Delta c_1 \geq 0 \rightarrow \Delta c_1 \leq 4/5$$
$$1+\frac{1}{3}\Delta c_1 \geq 0 \rightarrow \Delta c_1 \geq -3$$

از حل روابط بالا دامنه تغییرات Δc_1 و بالطبع c_1 محاسبه می شود.

$$\therefore -3 \leq \Delta c_1 \leq 4/5 \rightarrow 0 \leq c_1 \leq 7/5$$

ب) دامنه تغییرات b_1:

ابتدا متغیر پایه متناظر با b_1 را در جدول اولیه می یابیم که s_1 می باشد

بعد از انجام مرحله دوم به روابط زیر می رسیم:

پایه	مقدار	x1	x2	s1	s2	s3
z	36	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1
s1	$2+\Delta b_1$	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x2	6	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0
x1	2	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

شرط تعلق برای جدول فوق این است که مقادیر $\overline{b_i}$ ها غیر منفی باشند پس از بررسی شرط فوق دامنه تغییرات Δb_1 و b_1 به صورت زیر محاسبه می شود.

$$2+\Delta b_1 \geq 0 \rightarrow \Delta b_1 \geq -2 \rightarrow b_1 \geq 2$$

شکلهای غیر استاندارد

با توجه به بحثهای قسمت قبل شکلهای غیر استاندارد، مسائلی هستند که:

1. تابع هدف آنها به صورت « حداقل کردن » باشد.
2. محدودیت ها به صورت « بزرگتر یا مساوی » باشند.
3. متغیرهای تصمیم بتوانند مقادیر منفی را نیز بپذیرند (آزاد در علامت باشند).
4. متغیرهای تصمیم بتوانند مقادیر غیر مثبت را بپذیرند.
5. برخی b_i ها منفی باشند.

در اینجا به توضیح روشهایی که می تواند مسائل غیر استاندارد را حل کنند می پردازیم:

مسائل با تابع هدف حداقل

یک راه اینست که تابع هدف را کمینه کنیم که در اینصورت علامت جهت مطلوب متغیرها در سطر تابع هدف خلاف علامت آنها به هنگام بیشینه سازی است.

راه دیگر کمینه سازی تابع هدف می باشد. از انجا که حداقل کردن مقدار Z به مفهوم حداکثرکردن (Z -) می باشد لذا می توان با ضرب کردن تابع هدف در یک منفی، تابع هدف حداقل را به حداکثر تبدیل ومطابق با روش گفته شده قبلی به حل آن اقدام کرد. یعنی بیشینه سازی تابع معادل کمینه سازی منفی آن است بدین معنی که هر دو مساله مقایر بهین یکسانی برای ما دارند.

محدودیت های « بزرگتر یا مساوی » و یا « مساوی »

در مسائل شکل استاندارد، مبدأ مختصات به عنوان یک جواب موجه ابتدایی مورد استفاده قرار می گیرد. محدودیت های « بزرگتر یا مساوی » و یا « تساوی » موجب می شوند که مبدأ مختصات خارج از منطقه موجه قرار گرفته و امکان استفاده از آن به عنوان یک نقطه گوشه ای موجه ابتدایی میسر نباشد. لذا برای حل این مسائل از دو روش M بزرگ و دو مرحله ای استفاده می شود که در ادامه به توضیح این دو روش خواهیم پرداخت.

برای درک بهتر مطلب به مثال زیر توجه کنید.

با توجه به اطلاعات زیر می خواهیم ارزانترین غذائی که حداقل نیاز روزانه ما را به پروتئین، ویتامین ث و آهن تامین می کند تهیه نمائیم.

مثال 2:

	میزان مواد مورد نظر در هر بسته غذا به میلی گرم			حداقل میزان مواد مورد نیاز روزانه به میلی گرم
	ماکارونی با پنیر	مرغ	گوشت گوسفندی	
پروتئین	20	55	60	700
ویتامین ث	35	10	0	250
آهن	10	15	20	300
هزینه هر بسته	1/5	2	3	

برای راحتی کار، گوشت گوسفندی را غذای نوع 1، مرغ را نوع 2 و ماکارونی با پنیر را نوع 3 نامگذاری می کنیم. مثال یاد شده به صورت زیر مدل سازی می شود.

x_j : **تعداد بسته غذای نوع j**

$$\begin{aligned}
&\textbf{Minimize} \quad Z = 3x_1 + 2x_2 + 1/5x_3 \\
&\textbf{S.t.} \quad 60x_1 + 55x_2 + 20x_3 \ge 700 \\
&\qquad\qquad 10x_2 + 35x_3 \ge 250 \\
&\qquad\quad 20x_1 + 15x_2 + 10x_3 \ge 300 \\
&\qquad xj \ge 0 \qquad j = 1,2,3
\end{aligned}$$

برای اینکه نقاط پایه ای را پیدا کنیم نامعادلات را باید به معادله تبدیل کنیم. برای اینکار در اینجا نیاز به متغیرهای مازاد (surplus) داریم.

$$60x_1 + 55x_2 + 20x_3 - s_1 = 700$$

$$10x_2 + 35x_3 - s_2 = 250$$

$$20x_1 + 15x_2 + 10x_3 - s_3 = 300$$

$$xj \ge 0 \qquad j = 1,2,3 \quad \text{و} \quad s_i \ge 0 \quad i = 1,2,3$$

چون علامت متغیرهای مازاد منفی است پس نمی توانیم بلافاصله جدول را رسم کرده و کار را ادامه دهیم. چون در آنصورت مقادیر s_i ها منفی در می آید و این خلاف فرض پذیرفته شده است.

$$x = 0 \Rightarrow s_1 = -700 \quad , \quad s_2 = -250 \text{،} \quad s_3 = -300$$

تفاوت مدل حاضر با مدل قبلی این است که در آن مدل $x = 0$ یک جواب قابل قبول بود اما در این مدل یک جواب قابل قبول نمی باشد.

برای حل این مدل بایستی فضای قابل قبول مسئله را (موقتاً) گسترش دهیم تا نقطه $x = 0$ داخل فضای قابل قبول قرار گیرد تا حل مسئله را از نقطه $x = 0$ آغاز کنیم.

برای گسترش فضای شدنی، معادلات حاصل را به صورت رابطه $\leq$ در می آوریم.

بعد از تبدیل معادلات به نامعادلات برای اینکه دوباره آنها را به صورت معادلات در اوریم از متغیرهایی به نام متغیرهای مصنوعی استفاده می کنیم. صرف تغییر نام این متغیرها مشکل ما را حل نمی کند و می بایست بین متغیرهای کمبود و متغیرهای مصنوعی تمایز قائل شویم. برای اینکار از دو روش می توانیم استفاده کنیم:

1. روش M بزرگ.
2. روش دو مرحله ای.

روش M بزرگ

در محدودیت های « بزرگتر یا مساوی » از آنجا که متغیرهای کمکی را از سمت چپ نامعادله بایستی کم کرد تا حالت تساوی در محدویت برقرار گردد، متغیرهای کمکی را نمی توان به عنوان یک متغیر اساسی برای شروع مسأله در نظر گرفت چون این متغیر دارای ضریب 1- می باشد و این به جهت خارج بودن مبدأ مختصات از منطقه موجه است.

در محدویتهایی که صورت تساوی دارند نیز از آنجا که متغیرهای کمکی به کار گرفته نمی شوند، در شروع عملیات این محدودیت ها فاقد متغیر اساسی می باشند. به این جهت بایستی در هر دو حالت فوق از متغیرهای غیر منفی جدیدی که متغیرهای مصنوعی نامیده می شوند به عنوان متغیرهای اساسی شروع حل مسأله استفاده کرد و به اولین جواب موجه رسید. تفاوت متغیرهای مصنوعی (Artificial Variables) با متغیر های تصمیم و کمکی این است که متغیرهای تصمیم یا کمکی دارای معنای فیزیکی و مصادیق واقعی ملموس هستند، در صورتی که متغیرهای مصنوعی فقط جنبه محاسباتی داشته و فاقد مصداق و معنی فیزیکی می باشند.

در روش M بزرگ به متغیرهای مصنوعی در سطر تابع هدف بیشینه سازی ضریب M- و در سطر تابع هدف کمینه سازی ضریب M می دهیم. در صورتی که یک مسأله دارای منطقه موجه باشد، مقدار متغیرهای مصنوعی در جدول نهایی همگی به صفر می رسند و غیر صفر شدن حد افل یکی از این متغیرها در جدول نهایی به معنی فاقد منطقه موجه بودن مسأله است.

تابع هدف بعد از انتقال متغیرها به سمت چپ تساوی به صورت زیر در آمده و وارد جدول می شود

$$\text{Minimize} \quad z-3x1-2x2 - 1/5x3 - M a_1 - M a_2 - M a_3 = 0$$

لذا جدول ابتدایی مسأله به شکل زیر است.

پایه	مقدار	x1	x2	x3	s1	s2	s3	a1	a2	a3
z	0	-3	-2	$-1/5$	0	0	0	-M	-M	-M
a1	700	60	55	20	-1	0	0	1	0	0
a2	250	0	10	35	0	-1	0	0	1	0
a3	300	20	15	10	0	0	-1	0	0	1

حال جدول را به صورت متعارف در می آوریم.

پایه	مقدار	x1	x2	x3	s1	s2	s3	a1	a2	a3
z	1250M	$80M -3$	$80M -2$	$65M -1/5$	$-M$	$-M$	$-M$	0	0	0
a1	700	60	55	20	-1	0	0	1	0	0
a2	250	0	10	35	0	-1	0	0	1	0
a3	300	20	15	10	0	0	-1	0	0	1

حال عملیات را ادامه می دهیم تا همه متغیرهای مصنوعی صفر گردند که نتیجه می شود:

		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	a_3
Z	45	0	+0.25	0	0	0	$-0/15$	$-M$	$-M$	$-0/15-M$
x1	11.43	1	0.607	0	0	0.014	-0.05	0	-0.014	0.05
x3	7.14	0	0.286	1	0	$-0/029$	0	0	0.029	0
s1	128.6	0	-12.9	0	1	0.286	-3	-1	-0.286	3

حال عملیات را ادامه می دهیم تا شرط بهینگی حاصل گردد که نتیجه می شود:

پایه	مقدار	x1	x2	x3	s1	s2	s3	a1	a2	a3
z	40.29	-0.412	0	0	0	-0.006	-0.129	-M	0.006-M	0.129-M
x2	18.82	1.647	1	0	0	0.024	-0.082	0	-0.024	0.082
x3	1.765	-0.471	0	1	0	-0.029	-0.024	0	0.035	0.024
s1	370.6	21.8	0	0	1	0.588	-4.06	-1	-0.588	4.06

با توجه به جدول بهینه فوق سیاست بهینه اینست که گوشت گوسفندی مصرف نکنیم و 18.82 بسته مرغ و 1.765 بسته ماکارونی با پنیر مصرف نمائیم تا حداقل هزینه40.29 را داشته باشیم.

روش دو مرحله ای

روش M بزرگ در محاسبات کامپیوتری از دقت کمتری برخوردار است. لذا از روش دو مرحله ای نیز برای حل مسائل با محدودیت های بزرگتر یا مساوی و یا مساوی استفاده می شود. هر دو روش M بزرگ و دو مرحله ای یک سلسله جوابهای اساسی موجه یکسان را به دست می دهند (به استثنای موقعی که متغیر اساسی ورودی یگانه نباشد).

همان گونه که از نام این روش پیداست مسئله در دو مرحله حل میشود:

1. پیدا کردن جواب موجه ابتدائی (با استفاده از تابع هدف مصنوعی)

2. پیدا کردن جواب بهینه مسئله (با استفاده از تابع هدف اصلی مسئله)

در این روش مانند روش M بزرگ پس از اضافه کردن متغیر های مصنوعی در مرحله اول برا ی حل مسئله از یک تابع هدف که از مجموع متغیرهای مصنوعی موجود در محدودیت ها تشکیل یافته است به جای تابع هدف اصلی مسئله استفاده می شود که بهترین مقدار برای آن صفر است. در پایان مرحله اول در صورتی که مسئله اصلی دارای منطقه شدنی باشد مقدار تابع هدف به صفر می رسد و با به صفر رسیدن آن (و حذف متغیر های مصنوعی از ستون متغیر های اساسی) به یک جواب گوشه منطقه موجه می رسیم.

مرحله دوم با حرکت در منطقه موجه برای یافتن بهترین جواب ادامه می یابد. در این مرحله از تابع هدف اصلی مسئله و محدودیت های پایانی مرحله اول استفاده میشود.

متغیر آزاد در علامت :

اگر متغیر آزاد در علامت در مدل داشته باشیم از تغیر متغیر زیر استفاده می کنیم:

مثلا Yمتغیر آزاد در علامت است

$$Y'-Y''=Y$$

که Y' و Y'' هر دو نامنفی می باشند.

متغیر های تصمیم غیر مثبت باشند:

در این صورت از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم:

مثلا $x_j \le 0$ باشد و قرار دهیم : $x'_j = -x_j$

که اکنون x'_j نامنفی است .

شبه قیمت (Shadow cost, Marginal cost)

شبه قیمت هر محدودیت نشان دهنده میزان تغییر مقدار بهینه تابع هدف به ازاء افزایش عدد سمت راست آن محدودیت به میزان یک واحد است به شرطی که سایر پارامتر های مدل بدون تغییر باقی بمانند و مجاز باشیم با توجه به دامنه b_i مربوطه، به آن یک واحد اضافه کنیم.

در هر مسئله برای هر محدودیت موجود یک شبه قیمت داریم.

شبه قیمت از ضریب متغیر کمبود، مازاد یا مصنوعی متناظر آن محدودیت در سطر تابع هدف جدول بهینه بدست میآید.

نکته: هرگاه میزان موجودی یک منبع به صفر نرسیده باشد شبه قیمت آن صفر و برعکس هنگامی که موجودی یک منبع به صفر رسیده باشد شبه قیمت ان غیر صفر خواهد بود.

حال اگر مجاز به افزودن یک واحد به b_i نباشیم به ازائ هر مقدار مجاز که اضافه یا کم شود آن را در شبه قیمت ضرب کرده و میزان تغییر در Z را پیدا میکنیم.

مثال: $y_i = 10$ نشان می دهد که به ازای هر واحد تغییر در b_i میزان Z، 10 واحد تغییر می کند.

اگر بخواهیم b_i را 20 واحد افزایش دهیم (مشروط بر اینکه در دامنه تغییرات b_i مجاز به اینکار باشیم) آنگاه مقدار تابع هدف 200=10*20 واحد تغییر می کند.

برای دانستن اینکه این مقدار از Z کاسته یا به آن افزوده می شود از اصول زیر استفاده می کنیم.

- در هر وضعیت و در هر شرایط که باشید اضافه شدن محدودیت ها و یا تشدید آن ها به نفع شما نیست.
- در هر شرایطی کاهش و یا حذف محدودیت ها به ضرر شما نیست.

حال مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}&Maximize\ z = cx\\&Subject\ to:\\&Ax \le b\\&A'x \ge b'\\&A''x = b''\\&x \ge 0\end{aligned}$$

با توجه به اصول یاد شده

- اگر b را افزایش دهیم شدت محدودیت را کاهش داده ایم لذا مقدار تغییر تابع هدف نامطلوب نیست.
- اگر b را کاهش دهیم شدت محدودیت را تشدید کرده ایم لذا مقدار تغییر تابع هدف مطلوب نیست.
- اگر b' را افزایش دهیم شدت محدودیت را تشدید کرده ایم لذا مقدار تغییر تابع هدف مطلوب نیست.
- اگر b' راکاهش دهیم شدت محدودیت را کاهش داده ایم لذا مقدار تغییر تابع هدف نامطلوب نیست.
- اگر b'' راکاهش یا افزایش دهیم مقدار تغییر تابع هدف منفی یا مثبت یا صفر است.

مثال 2 را در نظر بگیرید.

برای تعیین شبه قیمت b_i ها لازم نیست دوباره جدول رسم شده و براساس b_i+1 حل شود. فقط کافی است ضریب متغیر کمکی متناظر را در جدول بهینه بیابیم که همان شبه قیمت محدودیت i ام میباشد.

به عنوان مثال $y_3=0.129$, $y_2=0.006$

لازم به ذکر است فقط در دامنه تغییرات محاسبه شده شبه قیمت ها این مقادیر را دارند.

هزینه کاهش یافته (تقلیل یافته)

ضرایب متغیر ها در سطر تابع هدف جدول بهینه را هزینه تقلیل یافته گویند.

تابع محدب و تابع مقعر

اگر بر روی نمودار یک تابع هر دو نقطه دلخواه را انتخاب کرده و بهم وصل کنیم تمام نقاط آن پاره خط روی نمودار یا زیر نمودار قرار گیرد آن تابع مقعر است. اگر هر دو نقطه دلخواه از تابع را در نظر گرفته و پاره خط ما بین آن‌ها را رسم کنیم تمام نقاط آن پاره خط روی نمودار یا بالای نمودار قرار گیرد تابع ما محدب است.

نکات مهم:

- اگر تمام متغیرهای غیر پایه در سطر تابع هدف جدول بهینه دارای ضریب غیر صفر باشند و تمام متغیرهای پایه مثبت باشند آنگاه مسئله دارای جواب بهینه یگانه می باشد و در اینصورت شبه قیمت‌ها نیز یگانه هستند.
- اگر متغیر غیر پایه ای که دارای شبه قیمت صفر می‌باشد به عنوان ورودی به پایه انتخاب شود و با مقداری مثبت وارد پایه شود در این حالت Z بهینه تغییری نمی‌کند. یعنی مسئله دارای جواب بهینه چندگانه می باشد.

صورت عمومی جداول سیمپلکس :

جدول اولیه :

پایه	مقدار	X	S
Z	0	$-c$	0
S	b	A	I

جدول نهایی :

پایه	مقدار	X	S
Z	$y\,b$	$\bar{c} = -c + yA$	y
X_B	$\bar{b} = B^{-1}b$	$\bar{A} = B^{-1}A$	B^{-1}

حال با استفاده از جداول بالا وتعاریف و روابط زیرمی توانیم از روی جدول اولیه بلافاصله به جدول نهایی دست یابیم .

1- $z = y\,.b$

2- $y = c_B\,.B^{-1}$

x_B : متغیر های پایه جدول نهایی

c_B : منفی ضرایب متغیر های پایه جدول نهایی در سطر تابع هدف جدول اولیه

B : ضریب متغیر های پایه جدول نهایی در محدودیت های جدول اولیه

B^{-1} : ضریب متغیر های پایه جدول اولیه در محدودیت های جدول نهایی

همزاد (دوگان، مزدوج، متجانس)Dual :

ما تا به حال با مدل های اولیه LP سر و کار داشتیم ولی برای هر مدل برنامه ریزی یک مدل همزاد نیز تعریف می شود. مساله دوگان یک تعریف ریاضی مرتبط دقیق است که به طور مستقیم از مسئله اولیه می تواند به دست آید.

هدف از مدل همزاد چیست؟

در برخی از مسائل حل یکی از دو مدل ممکن است زمان کمتری ببرد یعنی در برخی مسائل حل مدل همزاد زمان کمتری نسبت به حل مدل اصلی می برد و در برخی مسائل برعکس. ولی هر کدام از این دو مدل حل شود هم جواب بهینه خودش و هم جواب بهینه همزادش به دست می آید. برای حل مدل همزاد می توان از روش سیمپلکس همزاد استفاده کرد که بعدا توضیح داده می شود. در روش سیمپلکس همزاد متغیر های مصنوعی کاربردی ندارند.

هر مدلی همزاد خود را دارد و بین آنها یک رابطه دو سویه وجود دارد. فرم محدودیت های همزاد وابسته به نوع متغیر های مدل اولیه است و بالعکس. اگر مدل اولیه Max(Min) باشد همزاد آن به صورت Min(Max) است و همچنین ضرایب تابع هدف هر مدل ضرایب سمت راست محدودیت ها در مدل دیگر است و بالعکس.

متغیر ها و قیود مسئله دوگان می توانند از مساله اولیه به صورت زیر ساخته شوند:

1) برای هر کدام از m محدودیت اولیه یک متغیر دوگان تعریف می شود.

2) برای هر کدام از n متغیر اولیه یک قید دوگان تعریف می شود.

3) ضرایب طرف چپ قید دوگان برابر ضرایب (ستون) متناظر متغیر اولیه است. طرف راست آن برابر ضریب همان متغیر اولیه در تابع هدف است.

4) ضرایب تابع هدف دوگان برابر طرف راست محدودیت های اولیه است.

برای نمونه مدل زیر را در نظر بگیرید:

مدل اولیه :

$$\begin{aligned} &Max\ \ z = c.x \\ &s.t:\ \ A.x \le b \\ &\qquad\quad x \ge 0 \end{aligned}$$

مدل همزاد

$$\begin{aligned} &Min\ W = y.b \\ &s.t:\ \ y.A \ge c \\ &\qquad\quad y \ge 0 \end{aligned}$$

محدودیت‌های مدل همزاد همان شرط بهینگی مسئله اولیه است.

در زیر برای چند مدل همزادش را آورده ایم:

1)

$$\begin{array}{lll} Max \quad Z = C.X & & Min \quad W = y.b \\ s.t: \quad A.X = b & \leftrightarrow & s.t: \quad y.A \ge C \\ \quad X \ge 0 & & \quad \text{əïŀă } y \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{lll} Max \quad Z = C.X & & Min \quad W = y.b \\ s.t: \quad A.X \le b & \leftrightarrow & s.t: \quad y.A \le C \\ \quad X \le 0 & & \quad y \ge 0 \end{array}$$

3)

$$\begin{array}{lll} Max \quad Z = C.X & & Min \quad W = y.b \\ s.t: \quad A.X \ge b & \leftrightarrow & s.t: \quad y.A \ge C \\ \quad X \ge 0 & & \quad y \le 0 \end{array}$$

برای ترکیب همه موارد با هم یک مثال در نظر می گیریم:

$$\begin{array}{ll} Max & -z = 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 7x_4 \\ s.t: & 2x_2 + x_3 - x_4 \ge 5 \\ & -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ & x_1 + x_3 \le 2 \\ & x_1 \ge 0, \quad free\ x_2, \quad x_3 \le 0, \quad free\ x_4 \end{array}$$

همزاد آن به صورت زیر می باشد :

$$\begin{aligned} &Min \quad -W = 5\,y_1 + 3\,y_2 + 2\,y_3 \\ &s.t: \quad -y_2 + y_3 \ge 4 \\ &\qquad 2\,y_1 + y_2 = -3 \\ &\qquad y_1 - 2\,y_2 + y_3 \le 2 \\ &\qquad -y_1 + y_2 = 7 \\ &\qquad y_1 \le 0,\ free\ y_2,\quad y_3 \ge 0 \end{aligned}$$

برای تعیین نوع متغیر های مدل همزاد باید به محدودیت های اولیه نگاه کرد در واقع جهت محدودیت های مدل اولیه نوع متغیر های مدل همزاد را تعیین می کند.

گاهی تعداد متغیرها کم و تعداد محدودیت ها زیاد است پس بهتر است همزادش را حل کنیم که متغیرهای زیاد و محدودیت های کم دارد.

مثال 1: مدل همزاد زیر را در نظر بگیرید و به جدول نهایی مدل اولیه و همزادش توجه کنید.

$$\begin{aligned} &Max \quad Z = 2\,x_1 + x_2 \\ &s.t: \quad x_1 + x_2 \le 4 \\ &\qquad x_1 - x_2 \le 2 \\ &\qquad x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{aligned} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{aligned} &Min \quad W = 4\,y_1 + 2\,y_2 \\ &s.t: \quad y\ + y_2 \ge 2 \\ &\qquad y_1 - y_2 \ge 1 \\ &\qquad y_1 \ge 0 \quad y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

جدول نهایی مدل اولیه:

پایه	مقدار	x_1	x_2	s_1	s_2
Z	7	0	0	1.5	0.5
x_2	1	0	1	0.5	- 0.5
x_1	3	1	0	0.5	0.5

جدول نهایی مدل همزاد :

پایه	مقدار	y_1	y_2	s_1	s_2	a_1	a_2
W	7	0	0	- 3	- 1	$-M+3$	$-M+1$
y_2	0.5	0	1	- 0.5	0.5	0.5	- 0.5
y_1	1.5	1	0	- 0.5	- 0.5	0.5	0.5

همان طور که از جداول بالا مشخص است جواب مدل همزاد ضرایب متغیرهای کمبود در مدل اولیه هستند و منفی ضرایب متغیرهای کمبود در مدل همزاد جواب مدل اولیه هستند.

از دو مدل اولیه و همزاد آنکه محدودیت کمتر دارد زمان حل آن کمتر است.

اصول حاکم بر مدلهای اولیه و همزاد و روابط مابین آنها :

اصل همزادی ضعیف:

اگر مجموعه ی نقاط قابل قبول مسئله را **S** بگیریم و نقطه ای در داخل این فضا مانند **x** را در نظر بگیریم و تابع هدف را در آن به دست آوریم**:**

$$x \in S \;,\; Z = cx$$

و اگر فضای قابل قبول مدل همزاد را **T** بگیریم و نقطه ای در داخل این فضا مانند **y** را در نظر بگیریم و تابع هدف را در آن به دست آوریم**:**

$$y \in T \;,\; W = yb$$

اصل همزادی ضعیف بیان می دارد که:

$$\forall\ x \in S \ \text{و}\ y \in T \qquad z = cx \leq W = yb$$

اثبات:

$$\begin{array}{lcl} \text{Max } z = cx & & \text{Min } W = yb \\ \text{s.t } Ax \leq b & \longrightarrow & \text{s.t } YA \geq c \\ x \geq 0 & & y \geq 0 \end{array}$$

اگر محدودیت های معادله اول را در یک عدد غیر منفی ضرب کنیم (جهت تغییر نمی کند)و همه را با هم جمع کنیم (در معادله اول و معادله دوم و....)

$$\forall\ x \in S \;,\; Z = cx$$

$$Ax \leq b \longrightarrow \qquad yAx \leq yb$$

چرا ؟ چون در همزاد **y**ها غیر منفی هستند.

برای معادله همزاد هم همین کار را انجام می دهیم:

$$yA \geq c \longrightarrow \qquad yAx \geq cx$$

بنابراین در کل داریم:

$$Z = cx \leq yAx \leq yb = W$$

اصل بهینگی:

اگر $y \in T$ و $x \in S$ $Z = cx = yb = W,$

پس x یک جواب بهینه برای Z و y یک جواب بهینه برای W است.

اثبات به کمک برهان خلف: فرض کنیم x بهینه نباشد پس برای مسئله اولیه یک نقطه دیگری باید وجود داشته باشد که در محدودیت ها صادق باشد و مقدار تابع هدف در آن بیشتر باشد فرض کنیم x' چنین شرایطی داشته باشد.

$$cx' > cx = yb \quad \longrightarrow \quad cx' > yb$$

که $cx' > yb$ طبق اصل همزادی ضعیف هیچ گاه اتفاق نمی افتد.

به طور مشابه فرض کنیم که y برای تابع W بهینه نباشد و نقطه ای مانند Y' وجود دارد که جواب بهینه است.

$$y'b < yb = cx = Z \qquad (\#)$$

اصل نامحدود بودن:

اگر از دو مسئله اولیه و همزاد یکی را حل کنیم و مفدار تابع هدف آن نامحدود باشد محدودیت های مساله دیگر غیر ممکن هستند یعنی فضای قابل قبول مسئله ی دیگر تهی میشود و جواب ندارد.

اثبات: فرض کنیم تابع اولیه نا محدود ولی فضای قابل قبول مدل همزاد تهی نباشد. یعنی یک y وجود داشته باشد که $W = yb$. جواب بهینه بنا بر اصل همزادی ضعیف باید $yb > \infty$ باشد که این غیر ممکن است.

اصل همزادی قوی:

اگر از دو مسئله هر کدام را حل کردیم و به جواب بهینه رسیدیم دیگری هم جواب بهینه محدود دارد و مقدار تابع هدف برای هر دو یکسان است.

شرط بهینگی مساله مدل همزاد، صادق بودن محدودیت های مدل اولیه در جواب فعلی است.

Yها همان شبه قیمت ها هستند محدودیت های مدل همزاد هم شبه قیمت دارند که **X** ها هستند و کافی است در متغیرهای مازاد یک منفی ضرب کنیم و یا از ضریب متغیرهای مصنوعی در سطر تابع هدف **M-** را حذف کنیم تا به شبه قیمت برسیم.

به طور کلی یکی از روابط زیر بین این دو مدل برقرار است:

اولیه		همزاد
غیر ممکن	$\longrightarrow$	نا محدود
غیر ممکن و		غیر ممکن
بهینه و محدود	$\longleftrightarrow$	بهینه , محدود
نامحدود	$\longleftarrow$	غیر ممکن

شرایط کمبود تکمیلی:

$$\forall i, s_i y_i = 0 \quad \& \quad \forall j, x_j c'_j = x_j \bar{c}_j = 0$$

مجموعه ای این روابط را شرایط کمبود تکمیلی گوییم:

اثبات:اگر $x_j > 0$ باشد پس x_j پایه است پس $c'_j = 0$.

اگر $c'_j \# 0$ باشد بنابراین x_j غیر پایه است لذا $x_j = 0$.

اگر $c'_j = x_j = 0$ باشد که $c'_j x_j = 0$ برقرار است. این روابط در هر جدول متعارفی صادق هست.

اگر $y_i \# 0$ بنابراین s_i غیر پایه است و $s_i = 0$ خواهد بود.

اگر $s_i > 0$ باشد باید s_i پایه باشد بنابراین $y_i = 0$.

اگر $y_i = s_i = 0$ باشد که رابطه $y_i s_i = 0$ برقرار است.

قضیه کمبود تکمیلی:

اگر در جدولی **x** یک جواب قابل قبول مدل اولیه باشد و**y** هم یک جواب قابل قبول برای مدل همزاد باشد و شرایط کمبود تکمیلی صادق باشد آنگاه **x** یک جواب بهینه مدل اولیه و**y** یک جواب بهینه مدل همزاد است. یعنی اگر روابط زیر صادق باشد:

$$x_j \geq 0 \quad \& \quad c'_j x_j = 0 \quad j=1,\ldots,n$$

$$y_i \geq 0 \quad \& \quad y_i s_i = 0 \quad i=1,\ldots,m$$

آنگاه **x** یک جواب بهینه مسئله اولیه است و **y** یک جواب بهینه مدل همزاد است.

اصل کمبود تکمیلی بیان می دارد که اگر **x*** بهینه برای اولیه و **Y*** بهینه برای همزاد باشد داریم:

$$Cx^* = y^*Ax^* = y^*b$$

$$Y^*(-Ax^*+b)=0 \quad \text{اگر} \quad \begin{cases} Y^*>0 \rightarrow -A_i.x^*+b_i=0 \Rightarrow A_i.x^*=bi \\ -Ai.x^*+bi>0 \rightarrow Yi^*=0 \end{cases}$$

$$(-c+y^*A)x^*=0 \quad \begin{cases} \text{اگر} \quad -c_j+y^*A_{.j}>0 \rightarrow x_j^*=0 \\ \text{اگر} \quad x_j^*>0 \rightarrow -c_j+y^*A_{.j}=0 \end{cases}$$

($A_{.j}$ ستون **j** ام ماتریس **A**)

وقتی شبه قیمت مثبت است نا معادله به صورت محدودیت فعال است. محدودیتی که غیر فعال است شبه قیمت آن صفر است.

مثال2:

$$\text{Max} \quad z=30x_1+6x_2-5x_3+18x_4$$

مدل اولیه

$$\begin{aligned} \text{s.t} \quad & x_1+2x_3+x_4 \le 20 \\ & -2x_1+x_2-x_4 \le 15 \\ & 6x_1+2x_2-3x_3 \le 54 \\ & x_i \ge 0 \end{aligned}$$

$$\text{Min} \quad W=20y_1+15y_2+54y_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.t} \quad & y_1-2y_2+6y_3 \ge 30 \\ & y_2+2y_3 \ge 6 \\ & 2y_1-3y_3 \ge -5 \\ & y_1-y_2 \ge 18 \\ & y_j \ge 0 \end{aligned}$$

جدول نهایی مدل اولیه:

پایه	مقدار	X1	X2	X3	X4	S1	S2	S3
z	522	6	0	32	0	18	0	3
X4	20	1	0	2	1	1	0	0
S2	8	-4	0	7/2	0	1	1	-1/2
X2	27	3	1	-3/2	0	0	1/2	0

$x^*=(0,27,0,20)$ $\qquad z^*=522$

$y_2+2y_3=6 \qquad y_3=3$

$y_1-y_2=18 \quad \Rightarrow \quad y_1=18$

$s_2=8 \quad y_2=0 \qquad \rightarrow$

روش سیمپلکس همزاد:

در روش سیمپلکس همزاد ما شرط بهینگی را داریم ولی شرط تعلق را نداریم

پس با حفظ شرط بهینگی سعی می کنیم شرط تعلق را برقرار نمائیم.

در این روش ما از یک نقطه گوشه ای خارج از فضای قابل قبول شروع می کنیم تا به جواب قابل قبول برسیم به محض اینکه وارد فضای قابل قبول شدیم به نقطه بهینه می رسیم. این روش را با مثال زیر توضح می دهیم.

مثال 3: مدل همزاد مثال 2 را در نظر بگیرید. همانطور که گفتیم در این روش متغیرهای مصنوعی کاربردی ندارند.

ابتدا محدودیت های مدل همزاد را در یک منفی ضرب می کنیم و برای هر کدام متغیرهای کمبود در نظر می گیریم و به جدول اولیه زیر می رسیم.

پایه	مقدار	Y1	Y2	Y3	S1	S2	S3	S4
w	0	-20	-15	-54	0	0	0	0
S1	-30	-1	2	-6	1	0	0	0
S2	-6	0	-1	-2	0	1	0	0
S3	5	-2	0	3	0	0	1	0
S4	-18	-1	1	0	0	0	0	1

این جدول یک جدول متعارف نیست چون شرط بهینگی را داریم (چون ضرایب متغیرها در سطح تابع هدف همه غیرمثبت هستند) ولی شرط تعلق را نداریم (**bi** ها منفی هستند). هدف ما این است که متغیرهای پایه غیرمنفی باشند بنابراین از بین متغیرهای پایه آن که منفی ترین است را به عنوان خروجی از پایه انتخاب می کنیم (در این روش برعکس روش سیمپلکس اولیه که ابتدا ورودی به پایه را مشخص می کردیم، ابتدا خروجی از پایه را مشخص می کنیم.)

پس در اینجا S_1 که مقدار 30- را دارد به عنوان خروجی از پایه انتخاب می کنیم. برای مشخص کردن ورودی به پایه باید تست انجام دهیم. در سطر ضرایب منفی را در نظر می گیریم (1-، 6-) و برای تشکیل نسبت ها ضرایب متناظر این مقادیر در سطح تابع هدف را به این مقادیر منفی تقسیم می کنیم و باید قدر مطلق این ضرایب را در نظر گرفت و نسبتی که از همه کوچکتر است ستون مربوطه اش را به عنوان ورودی به پایه مشخص می کنیم. در این مثال داریم:

$$(-54)/(-6) = 9 \qquad (-20)/(-1) = 20$$

بنابراین X_3 به عنوان ورودی به پایه و 6- عنصر چرخشی است بقیه عملیات مانند قبل انجام می شود.با اعمال این تغییرات به جدول زیر می رسیم.

پایه	مقدار	Y1	Y2	Y3	S1	S2	S3	S4
w	270	-11	-33	0	-9	0	0	0
Y3	5	1/6	-1/3	1	-1/6	0	0	0
S2	4	1/3	-5/3	0	-1/2	1	0	0
S3	-10	-5/2	1	0	1/2	0	1	0
S4	-18	-1	1	0	0	0	0	1

همانطور که از جدول بالا مشخص است هنوز شرط بهینگی برقرار نیست و باید دوباره تست نسبت انجام دهیم. در این مرحله ورودی به پایه X_1 و خروجی از پایه S_4 خواهد بود.

پایه	مقدار	Y1	Y2	Y3	S1	S2	S3	S4
w	270	0	-44	0	-9	0	0	-11
Y3	5	0	-1/3	1	-1/6	0	0	0
S2	4	0	-5/3	0	-1/2	1	0	0
S3	-10	0	1	0	1/2	0	1	0
Y1	18	1	-1	0	0	0	0	1-

در یک جدول متعارف ممکن است حالت های زیر اتفاق بیافتد:

1) شرط تعلق داریم و شرط بهینگی را نداریم. که در این صورت از روش سیمپلکس اولیه استفاده می کنیم.

2) شرط تعلق نداریم و شرط بهینگی را داریم. که در این صورت از روش سیمپلکس همزاد استفاده می کنیم

3) شرط تعلق نداریم و شرط بهینگی ریاضی نداریم.

که در این صورت از روش سیمپلکس پارامتری اولیه – همزاد استفاده می کنیم.

روش سیمپلکس پارامتری اولیه – همزاد:

این روش را به کمک یک مثال توضیح می دهیم.

$$\begin{aligned}&Maximize \quad z = 3x_1 - 2x_2\\&Subject\ to:\\&x_1 + x_2 \le 6,\\&x_1 - 2x_2 \ge 0.5,\\&-x_1 + 3x_2 \ge 1,\\&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.\end{aligned}$$

در این روش نیز به سراغ متغیر های مصنوعی نمی رویم. محدودیت هایی که به صورت (≥)هستند در یک منفی ضرب کرده تا به صورت (≤) شوند پس متغیرهای کمبود را معرفی می کنیم. جدول اولیه این مدل به صورت زیر است:

پایه	مقدار	X1	X2	S1	S2	S3
z	0	2	-3+ α	0	0	0
S1	6	1	1	1	0	0
S2	-0.5+α	-1	2	0	1	0
S3	-1+ α	1	-3	0	0	1

در این جا می بینیم که شرط بهینگی و تعلق را نداریم. ضریب **x_2** در سطح تابع هدف منفی است و لذا شرط بهینگی را نداریم و شرط تعلق نیز وجود ندارد زیرا **b_3,b_2** مقداری منفی هستند.

بنابراین در جاهایی که شرط بهینگی و تعلق برقرار نیست a را اضافه کرده ایم. که a یک مقدار مثبت است. اگر a به اندازه کافی بزرگ باشد جدول بهینه می شود. هدف ما این است که با انجام عملیاتی مقدار a را به صفر برسانیم برای این که شرط بهینگی و تعلق را داشته باشیم باید روابط زیر برقرار باشند:

$$\left\{\begin{array}{l}-3+a \ge 0,\\-0.5+a \ge 0,\\-1+a \ge 0,.\end{array}\right\} \Rightarrow a \ge 3$$

حداقلی که a باید به خود بگیرد تا جدول بهینه شود در اینجا 3 می باشد پس این جدول برای مقادیر $a \ge 3$ یک جدول بهینه است. ولی اگر $a < 3$ باشد مثلا $a = 2.9$ در این صورت جدول شرط تعلق را دارد ولی شرط بهینگی را ندارد یعنی

حالت سیمپلکس اولیه به وجود می آید که عملیات چرخش لولایی را انجام می دهیم. در این جا **X2** ورودی به پایه است با انجام تست نسبت معلوم می شود که **S2** خروجی از پایه خواهد بود.و**2** عنصر چرخشی است. بعد از انجام عملیات به جدول زیر می رسیم.

پایه	مقدار	X1	X2	S1	S2	S3
z	-3/4+ f(α)	1/2+ α /2	0	0	3/2- α /2	0
S1	25/4- α /2	3/2	0	1	-1/2	0
X2	-1/4+ α /2	-1/2	1	0	1/2	0
S3	-7/4+5 α /2	-1/2	0	0	3/2	1

برای برقراری شرط بهینگی و شرط شدنی ضرایب سطر تابع هدف و مقادیر سمت راست محدویت‌ها باید نا منفی باشند یعنی:

$$\left\{\begin{array}{l} 1/2+a\ /2\geq 0, \\ 3/2-a\ /2\geq 0, \\ 25/4-a\ /2\geq 0, \\ -1/4+a\ /2, \\ -7/4+5a\ /2. \end{array}\right\}\Rightarrow 0.7\leq a\ \leq 3$$

بنابراین در کل: $3 \leq a \leq 0.7$. اگر مقدار a کمتر از **0.7** باشد مقدار **S3** منفی می‌شود بنابراین از روش سیمپلکس همزاد استفاده می کنیم یعنی ابتدا عنصر خروجی را مشخص می کنیم که **S3** خروجی از پایه و**X1** ورودی به پایه خواهد بود. به همین صورت کار را ادامه می دهیم تا $a = 0$ در بازه قرار گیرد.

نظریه بازی:

در نظریه بازی،یک بازی را تحت شرایط خاص بررسی می کنیم:

1- بازیکنان محافظه کارند (ریسک نمی کنند).
2- هر دو بازیکن اطلاعاتشان از بازی یکسان است.

هدف = یک بازی با این ویژگی داریم. بازیکن **A**و **B** چگونه بازی کنند تا هدفی که دارند به بهترین نحو تامین شود.

بطور مثال دو ایستگاه تلوزیونی داریم که با هم رقابت دارند و هدف آنها این است که درآمدشان را از طریق پخش آگهی ماکزیمم کنند.

نرخ آگهی ها بستگی به این دارد که چند نفر در ان ساعت بخصوص برنامه های آنها را می بینند. با این فرض که ایستگاه ها محافظه کارند و اطلاعاتشان یکسان است (یعنی ساعت پخش آگهی ها معلوم است.)

جدول پاداش بازیکن آ به صورت درصد سهم بازار:

کمینه	گزینه3	گزینه 2	گزینه1	
30	60	40	30	گزینه1
10	30	10	20	گزینه2
	60	40	30	ماکسیمم

در اینجا:

(پاداش) **min max**= (پاداش)**max min**

یعنی این بازی دارای **نقطه تعادل** است:

اگر هر کدام از بازیکن ها بخواهد این گزینه (گزینه1)را تغییر دهد فقط به ضررش تمام خواهد شد.

آ: بازیکن سطری: سطری را بازی می کند که به نفعش باشد.

ب: بازیکن ستونی: ستونی را بازی می کند که به نفعش باشد.

حل یک مثال:

	1	2	3	4	min
1	14	15	25	18	14
2	6	17	6	9	6
3	5	7	5	4	4
4	16	5	5	5	5
max	16	17	25	18	

بازی مجموع صفر:

اگر کسی ببرد فرد مقابل همین مقدار را می بازد. اگر در جدول منفی داشته باشیم به معنی پاداش به طرف مقابل است.

بازی مکمل:

سهم بازار صد درصد می باشد و با مشخص شدن سهم یکی از بازیکن ها، باقیمانده آن سهم رقیب می شود.

در مثال ذیل چون تعادل وجود ندارد تصمیم بهینه ای نداریم. در این حالت به صورت زیر عمل می کنیم:

	Y1	Y2	Y3	Y4	Min
x1	14	-15	25	18	-15
x2	6	17	-6	-9	-9
x3	-5	-7	5	4	-7
x4	16	-6	-5	5	-6
Max	16	17	25	18	

ابتدا یادآوری میکنیم که فرمول امیدریاضی، متوسط، یا میانگین مقادیر گسسته عبارتست از:

$$E(x)=\Sigma\ x_i p_i$$

ما چون می خواهیم حد اقل امیدریاضی برد بازیکن ستونی را تا آنجاکه امکان دارد بالا ببریم داریم:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } z=u\\
&\text{s.t } 14x_1+6x_2-5x_3+16x_4\geq u\\
&-15x_1+17x_2-7x_3-6x_4\geq u\\
&25x_1-6x_2+5x_3-5x_4\geq u\\
&18x_1-9x_2+4x_3+5x_4\geq u\\
&x_1+x_2+x_3+x_4=1\\
&x_j\geq 0 \quad j=1,2,3,4
\end{aligned}
$$

از دید بازیکن سطری: چون می خواهیم حد اکثر امیدریاضی برد بازیکن ستونی را تا آنجاکه امکان دارد پائین ببریم داریم:

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } W=V\\
&14Y_1-15Y_2+25Y_3+18Y_4\leq v\\
&6Y_1+17Y_2-6Y_3-9Y_4\leq v\\
&-5Y_1-7Y_2+5Y_3+4Y_4\leq v\\
&16Y_1-6Y_2-5Y_3+5Y_4\leq v\\
&Y_1+Y_2+Y_3+Y_4=1\\
&Y_i\geq 0 \quad i=1,2,3,4
\end{aligned}
$$

اگر بازی نقطه تعادل نداشته باشد به روش بالا عمل می کنیم.تا سیاست بهینه را بیابیم. و هر بازیکن اگر از سیاست بهینه سرپیچی کند به ضرر اوست.

دو مدل بالا همزاد هستند پس با حل یکی می توانیم جواب بهینه هردو را بدست آوریم.

روش سیمپلکس برای متغیر های کراندار:

در بعضی از مدل های خطی بعضی از متغیرها دارای کران پایین یا بالا هستند. یک روش این است که با آن ها مثل محدودیت برخورد کنیم. ولی ما می خواهیم این محدودیت ها را به طور ضمنی به کار ببریم یعنی به جدول اضافه نکنیم زیرا حجم مدل زیاد می شود به همین جهت روش ویژه ای را برای حل این گونه مدل ها ارائه می دهیم.

$$
\begin{aligned}
&Maximize \quad z = cx \\
&Subject\ to: \\
&\qquad Ax \le b \\
&\qquad a \le x \le u
\end{aligned}
$$

وجود حد بالا برای این متغیرها چه چیزی را تغییر می دهد؟

قبلا برای انجام تست نسبت در ستون لولا تنها مقادیر مثبت را در نظر می گرفتیم ولی متغیرهایی که کران بالا دارند مقادیر منفی ستون لولا نیز برای آن ها اهمیت دارد.

در روش سیمپلکس برای متغیر هایی که حد بالا دارند و می خواهیم جدول بعد را تشکیل دهیم باید سه نکته را در نظر بگیریم:

1) مقادیر x_i ها نباید از حد بالای خود تجاوز کنند.

2) از نقطه گوشه ای که در آن جهت داریم نباید بگذریم. (کمینه تست نسبت را برای همین منظور محاسبه می‌کنیم.)

3) محدودیت های حد بالای سایر متغیرها را به طور ضمنی رعایت کنیم.

اگر متغیرها حد پایین داشتند باید با یک تغییر متغیر حد پایین را صفر کنیم. یعنی $x' = x - a \ge 0$ را در مدل اعمال می کنیم. لذا $0 \le x' \le u - a = u'$.

برای شروع باید پایه مورد قبولی را داشته باشیم که درشرط $x \le u$ نیز صدق کند برای رسیدن به این هدف می‌توان از متغیر های مصنوعی استفاده کرد.

فرض کنیم x_j ورودی به پایه باشد برای تعیین خروجی از پایه محاسبه می کنیم:

$\text{Min}\{u_j,t_1,t_2\}$

$t1= \min\{b'_i/a'_{ij} \mid a'_{ij}>o\}$

$t2= \min\{(b'_i-u_k)/a'_{ij} \mid a'_{ij}<o\}$

اگر $\text{Min}\{u_j,t_1,t_2\}$ $u_j,$ شد در جدول تنها تغییر متغیر $x_j =u_j- x'_j$ اعمال می شود و این تغییر به خاطر این است که متغیرهای غیر پایه باز هم مقدارشان صفر باشد.

اگر $\text{Min}\{u_j,t_1,t_2\}$ $t_1,$ باشد مثل گذشته عملیات چرخش لولایی را انجام می دهیم.

اگر $\text{Min}\{u_j,t_1,t_2\}$ $t_2,$ شود یعنی قبل از اینکه به نقطه‌ی گوشه ای مورد نظر برسیم یا به حد بالای متغیر ورودی به پایه برسیم متغیر دیگری به حد بالای خود می رسد. مثلاً x_k به حد بالایش می رسد یعنی $x_k=u_k$ و نیز $x_k=u_k-x'_k$. پس در نهایت دو کار در این حالت انجام می دهیم یکی x_j را وارد پایه می‌کنیم و مقدارش مثبت می شود و دیگری x_k را به حد بالای خودش می رسانیم یعنی $x_k=u_k-x'_k$ را اعمال می کنیم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال:

$\text{Max} \quad z=4x_1+2x_2+6x_6$

$\text{s.t} \qquad 4x_1-x_2\le9$

$-x_1+x_2+2x_3\le8$

$-3x_1+x_2+4x_3\le12$

$1\le x_1\le3, \quad 0\le x_2\le5 \quad ,0\le x_3\le2$

ابتدا حد متغیر x_1 را صفر می کنیم یعنی تغییر $x'_1=x_1-1$ را اعمال می کنیم. و آن را در محدودیت ها و تابع هدف اعمال می کنیم.

$$\text{Max } z=4x'_1+2x_2+6x_3+4$$

$$\text{S.T} \quad 4x'_1-x_2\leq 5$$

$$-3x'_1+x_2+4x_3\leq 15$$

$$0\leq x'_1\leq 3 \;,\; 0\leq x_2\leq 5 \;,\; 0\leq x_3\leq 2$$

پایه	مقدار	x'1	x2	x3	S1	S2	S3
Z	4	-4	-2	-6	0	0	0
S1	5	4	-1	0	1	0	0
S2	9	-1	1	2	0	1	0
S3	15	-3	1	4	0	0	1

x_3 را ورودی به پایه در نظر می گیریم و داریم:

$$\mathbf{T_1=min\{9/2.15/4\} = 3.75}$$

$$\text{Min}\{\ u3=2,\ t1=3.75\ ,\ t3=\infty\ \}=u3=2$$

پس تنها تغییرمان **x_3=2-** x'_3 که برای این منظور کافی است که **u_3** برابر ستون **x_3** را از ستون مقدار کم کنیم و ستون **x_3** را در منفی ضرب کنیم.

پایه	مقدار	x'1	x2	x3	S1	S2	S3
z	16	-4	-2	+6	0	0	0
S1	5	4	-1	0	1	0	0
S2	5	-1	1	-2	0	1	0
S3	7	-3	1	-4	0	0	1

x_1 را ورودی به پایه در نظر می گیریم و داریم

$t2 = \min\{(5-\infty)/-1, (7-\infty)/-3\} = \infty$, $t1 = 5/4 = 1.25$
$\min\{u1 = 2, t1 = 1.25, t2 = \infty\} = t1 = 1.25$

بنابراین فقط عملیات چرخش لولایی انجام می دهیم.

پایه	مقدار	x1	x2	x'3	S1	S2	S3
z	21	6	-3	+6	1	0	0
x1	5/4	1	-1/4	0	1/4	0	0
S2	25/4	0	3/4	-2	1/4	1	0
S3	43/4	0	1/4	-4	3/4	0	1

x_2 را ورودی به پایه در نظر می گیریم و داریم:

$$t_1=\min\{25/3,43\}=25/3 \quad t_2=(5/4-2)/(-1/4)=3$$

$$\min\{u_2=5,t_1=25/3,3\}=t_2=3$$

و چون t_2,min شده باید تغییر $x_1=2-x'_1$ را اعمال کنیم و x_2 را وارد پایه کنیم.

پایه	مقدار	x'_1	x2	x3	S1	S2	S3
z	30	12	0	+6	-2	0	0
x2	3	-1	1	0	-1	0	0
S2	4	-3	0	-2	1	1	0
S3	10	-1	0	-4	1	0	1

حالا s_1 وارد پایه می شود و این روش را خود ادامه دهید.

مدل حمل و نقل

تعریف مدل حمل و نقل:

مدل حمل و نقل نوع خاصی از مسأله برنامه ریزی خطی است. این مدل با وضعیتی سر و کار دارد که یک کالا از نقاط تولید (مثل کارخانه ها) به نقاط مقصد (مثل توزیع کننده ها) ارسال می شود.

هدف تعیین مقادیر ارسالی از هر مبدأ به هر مقصد است که ضمن برقراری محدودیت های عرضه و نیازمندیهای تقاضا مجموع هزینه حمل و نقل را کمینه کند. در این مدل فرض می شود که هزینه ی حمل و نقل در مسیر معین نسبت مستقیم با تعداد واحدهای ارسالی روی مسیر دارد. در حالت کلی مدل حمل و نقل می تواند به محیط هایی به جز حمل و نقل مستقیم یک کالا شامل موجودی زمان بندی استخدام و تخصیص نیروی انسانی تعمیم داده شود. نمونه ای از مدل حمل و نقل را در زیربه صورت یک جدول آوردهایم.

مقصد / مبداء	متقاضی (1)	متقاضی (2)	متقاضی (3)	S_i (عرضه)
نقطه تولید (1)	15	20	30	100
نقطه تولید (2)	40	30	50	250
D_j (تقاضا)	80	180	90	350

در این مثال 2 عرضه کننده و 3 متقاضی وجود دارند. هزینه ارسال یک واحد محصول از نقطه تولید i به متقاضی j را C_{ij} می نامیم که در جدول این اعداد، داخل مربع در گوشه ی سمت چپ نشان داده شده اند مثلاً هزینه ی ارسال یک واحد محصول از نقطه تولید (2) به متقاضی (3) برابر است با $c_{23}=50$ و در ستون های عرضه و تقاضا مقدار کل تقاضای هر متقاضی و عرضه ی هر عرضه کننده نشان داده شده است. حال سؤال این است که چگونه تولید را بین این متقاضیان توزیع کنیم تا هزینه ی حمل و نقل حداقل شود. مسأله را به یک مدل برنامه ریزی خطی تبدیل می کنیم.

x_{ij} : میزان کالای ارسالی از نقطه تولید **i** به متقاضی **j**

$$\text{Minimize} \quad z=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} c_{ij} \, . \, x_{ij}$$

$$\sum_{j} x_{ij} \le S_i \quad i=1\,,2$$

$$\sum_{i} x_{ij} \ge D_j \quad j=1,2,3$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad i=1\,,2\,\&\, j=1,2,3$$

در این مثال چون مجموع عرضه‌ها و تقاضاها برابر اند (100+250=80+180+90) این یک مسئله ی متعادل است و بنابراین محدودیت ها به فرم تساوی هستند. اگر مسأله متعادل نباشد باید آن را به صورت یک جدول متعادل نوشت به این ترتیب که اگر عرضه از تقاضا بیشتر بود یک ستون مجازی با هزینه های صفر و میزان تقاضای اختلاف عرضه و تقاضا به جدول اضافه می شود . در صورت بیشتر بودن تقاضا از عرضه یک سطر با هزینه جریمه‌ها و میزان عرضه ای برابر اختلاف تقاضا و عرضه به جدول اضافه می کنیم .

مسئله:

$$\text{Min} \quad z=15x_{11}+20x_{12}+30x_{13}+40x_{21}+30x_{22}+50x_{23}$$

$$\text{s.t} \quad x_{11}+x_{12}+x_{13}=100$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=250$$

$$x_{11}+x_{21}=80$$

$$x_{12}+x_{22}=180$$

$$x_{13}+x_{23}=90$$

$$x_{ij}\ge 0$$

در حالت کلی m مبدأ و n مقصد داریم بنابراین مسئله دارای m+n محدودیت است ولی اگر مسئله متعادل باشد از بین این m+n محدودیت یکی زاید است یعنی m+n-1 محدودیت مستقل داریم. در هر نقطه قابل قبول یکی از محدودیت ها ترکیب خطی از سایر محدودیت هاست و خود به خود به ناچار صادق می باشد. ما به دنبال پیدا کردن x_{ij} بهینه هستیم برای این منظور ابتدا باید از یک جواب قابل قبول یا به عبارت دیگر از یک نقطه گوشه ای قابل قبول شروع کنیم. برای پیدا کردن این نقطه گوشه ای راه های متعددی وجود دارد که آنها را توضیح خواهیم داد.

روش گوشه ی شمال غربی:

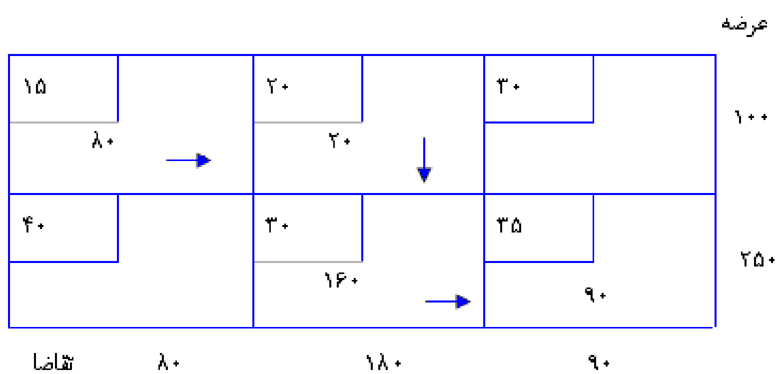
این روش از خانه گوشه شمال غربی (متغیر x_{11}) شروع می کند.

مرحله ی 1) به خانه ی انتخاب شده بزرگترین مقدار مجاز را از بین مقادیر عرضه و تقاضایی که در سطر یا ستون این خانه قرار دارد تخصیص دهید(این مقدار min یکی از دو عدد خواهد بود) و سپس مقادیر متناظر عرضه و تقاضا را با کم کردن مقدار داده شده متعادل کنید .

مرحله ی 2) سطر یا ستون با مقدار صفر را برای نشان دادن این که در آن سطر یا ستون تخصیص بیشتری نمی تواند صورت بگیرد علامت (*) بزنید. اگر سطر و ستون به طور هم زمان برابر صفر شوند تنها یکی را علامت بزنید و یک عرضه ی (تقاضا) صفر در سطر (ستون) را بدون علامتگذاری باقی بگذارید. توجه کنید خانه هایی که مشمول سطر یا ستون علامت زده شده اند دیگر مجاز به انتخاب شدن نیستند .

مرحله ی 3) اگر دقیقاً یک سطر یا ستون علامت نخورده باقی است توقف کنید در غیر این صورت اگر یک ستون علامت خورده است به خانه سمت راست حرکت کنید و اگر یک سطر علامت خورده است یک خانه پایین رفته و به مرحله 1 بروید.

مثا لی برای آشنایی بیشتر با این روش ارائه می دهیم :



a) خانه x_{11} را انتخاب می کنیم این خانه دارای تقاضای 80 و عرضه 100 می باشد . min این دو عدد (80) را به خانه اختصاص می دهیم . حال این ستون دارای مقدار صفر و عرضه 20=80-100 خواهد بود .

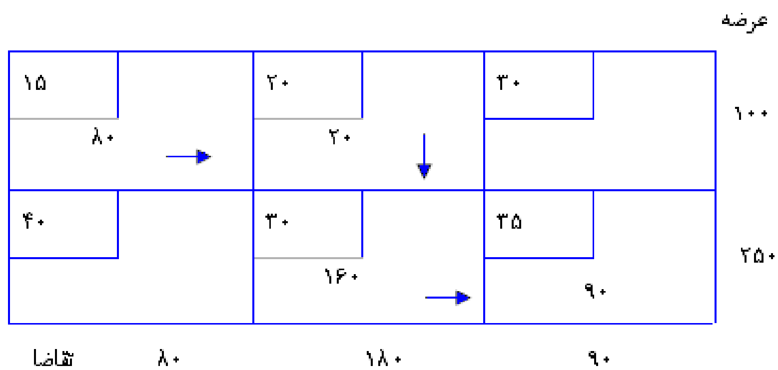
b) ستون اول علامت می خورد و ما دیگر مجاز به انتخاب هیچ کدام از خانه های آن نیستیم .

c) پس به سمت راست حرکت می کنیم یعنی خانه x_{12} . دوباره عملیلت را تکرار می کنیم تا فقط یک سطر یا ستون باقی بماند .

روش حداقل هزینه (حداقل ماتریس)

روش کمترین هزینه با متمرکز شدن روی ارزانترین مسیر معمولا یک جواب آغازین بهتر پیدا می کند. در این روش با تعیین خانه با کمترین هزینه (در صورت منحصر به فرد نبودن یکی به دلخواه انتخاب می شود) شروع می کنیم و به آن بیشترین تخصیص ممکن را میدهیم. سپس سطر یا ستونی را که عرضه یا تقاضایش صادق شده علامت می زنیم. در ادامه همواره به دنبال خانه علامت نخورده (واقع در سطر یا ستون علامت نخورده) با کمترین هزینه می گردیم و فرآیند را ادامه می دهیم تا اینکه در انتها دقیقاً یک سطر یا ستون علامت نخورده داشته باشیم.

مثال:



*

از بین خانه های جدول خانه(1،1) کمترین میزان هزینه را در جدول دارد (15) و بیشترین مقداری که می توان به آن تخصیص داد 80 است بنابراین مقدار تقاضا در ستون 1 را صفر میکنیم و در سطر یک مقدار عرضه را برابر 20=80-100.

در ادامه به سراغ خانه با کمترین هزینه ی علامت نخورده یعنی (1،3) می رویم و بیشترین تخصیص را که برابر با 20 است به آن می دهیم و مقدار عرضه وتقاضا را متعادل می کنیم. و این کار را ادامه می دهیم تا تنها یک سطر یا ستون باقی بماند.توجه داشته باشیم که در بین خانه هایی با هزینه کمتر خانه ای را انتخاب می کنیم که مشمول سطر یا ستون علامت خورده نباشد . در این روش داریم z=10900.

روش وگل:

این روش بیشتر اوقات جواب های بهتری نسبت به روش حداقل هزینه را تولید میکند .

مرحله ی 1) برای هر سطر (هر ستون) با عرضه ی (تقاضا) علامت نخورده، یک جریمه با کم کردن کوچکترین هزینه در آن سطر (ستون) از کوچکترین هزینه بعدی در همان سطر (ستون) تعیین کنید. (قدر مطلق تفاضل کمترین هزینه ها در یک سطر)

مرحله 2) سطر یا ستونی که دارای بزرگترین جریمه است مشخص کنید. اگر بزرگترین جریمه منحصر به فرد نباشد یکی را به دلخواه انتخاب کنید. در سطر یا ستون انتخاب شده به متغیری که دارای کمترین هزینه است بیشترین مقدار ممکن را اختصاص دهید و عرضه و تقاضا را متعادل کنید و سطر و ستون تکمیل شده را علامت بزنید. اگر یک سطر یا ستون به طور همزمان تکمیل شدند تنها یکی از آنها علامت زده می شود و به سطر (ستون) باقیمانده یک عرضه (تقاضا) صفر نسبت داده می شود.

مرحله 3)

الف: اگر دقیقاً یک سطر یا ستون علامت نخورده باقی مانده است توقف کنید. متغیرهای پایه‌ای آن سطر (ستون) را خانه های علامت نخورده آن قرار دهید.

ب: در غیر این صورت به مرحله یک بروید.

برای آشنایی با این روش مثال زیر را ارائه می دهیم.

مثال:

	40-15=25	30-20=10	50-30=20	
20-15=5	15 80	20	30	100
-30=10 40	40	30	50	250
	80	180	90	

با توجه به جدول ستون 1 دارای بیشترین جریمه است و در آن ستون خانه ی (1،1) دارای کمترین هزینه است.

	0	30-20=10	50-30=20	
30-20=10	15 / 80	20	30 / 20	20
50-30=20	40	30	50	250
	0	180	90	

	0	30	50	
0	15 / 80	20	30 / 20	0
50-30=20	40	30	50 / 70	250
	0	180	90	

	0	30	0	
0	15 / 80	20	30 / 20	0
30	40	30 / 180	50 / 70	180
	0	180	90	

در این روش **z=10700**.

روش راسل:

در این روش ما از مدل همزاد استفاده می کنیم و ابتدا مدل همزاد را می نویسیم. محدودیت های مدل همزاد به شکل $u_i+v_j\leq c_{ij}$ که با استفاده از جدول u_i جریمه سطری و v_j جریمه ستونی است.

$$u_i+v_j\leq c_{ij}$$
$$C_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_i)\geq 0$$

اگر در سطر تابع هدف جدول سیمپلکس اولیه ضریب x ما c_{ij} می باشد و معادلات محدودیت همزاد شرط بهینگی اولیه اند پس اگر $c_{ij}\geq 0$ شود پایه بهینه می شودولی ما به دنبال یافتن پایه قابل قبول هستیم. اگر این پایه وجود می داشت به دنبال شرط بهینگی بودیم. ما ابتدا اصلا پایه نداریم پس u_i و v_j را نداریم باید آنها را برآورد کنیم. برآورد u_i هر سطر را بیشترین هزینه آن سطر و برآورد v_i هر ستون را بیشترین هزینه آن ستون قرار می دهیم.

برای هر سطر و ستون u_i, v_i آن را به دست می آوریم و برای هر خانه C_{ij} را به دست می آوریم و به خانه با منفی ترین c_{ij} بیشترین تخصیص را می دهیم. سپس عرضه و تقاضا را متعادل می کنیم و روش را دوباره از اول تکرار می کنیم. حال مثالی را ارائه می دهیم و برای آن با روش های گفته شده یک جواب آغازین به دست می آوریم.

مثال:

			s_i
40	30	20	500
30	40	50	300
20	40	60	400
300	400	300	d_i

این جدول متعادل نمی باشد زیرا جمع عرضه ها و تقاضا ها برابر نمی باشند ابتدا باید متعادلش کنیم یعنی یک ستون اضافه کنیم با هزینه های صفر. که به آن عرضه موهومی گویند.

روش گوشه شمال غربی:

				s_i
40 $\rightarrow 300$	30 $\downarrow 200$	20	0	500
30	40 $\rightarrow 200$	50 $\downarrow 100$	0	300
20	40	60 $\rightarrow 200$	0 200	400
300	400	300	200	d_i

روش کمترین هزینه:

				s_i
40	30	20 300	0 200	500
30	40 300	50	0	300
20 300	40 100	60 0	0	400
300	400	300	200	d_i

z=28000

چون یک متغیر پایه مقدار صفر گرفته است پس تباهیدگی رخ داده است. در مرحله اول با سه خانه با هزینه صفر روبه رو می شویم که یکی را به دلخواه انتخاب می کند و مقدار 200 را به آن تخصیص می دهد. بنابر این عرضه در ستون سه، صفر می شود و باید این ستون را کنار بگذاریم و در بین بقیه به دنبال کمترین هزینه می رویم و روش را ادامه می دهیم.

روش و گل:

				s_i
40	30	20 300	0 200	500
30	40 300	50	0	300
20 300	40 100	60 0	0	400
300	400	300	200	d_i

z=28000

زمانی که ستونی حذف می شود در اختلاف سایر ستونها تغییری ایجاد نمی شود.

روش راسل:

ابتدا u_i و v_j را برای هر سطر و ستون محاسبه و سپس مقدار $c_{ij}-(u_i+v_j)$ را حساب میکنیم.

	40	40	60	0	s_i
40	40 -40	30 -50	20 -80	0 -40	500
50	30 -60	40 -50	50 -60	0 -50	300
60	20 -80 300	40 -60	60 -60	0 -60	100
d_i	0	400	300	200	

	40	40	60	0	s_i
30	40 -30	30 -40	20 -70 300	0 -30	200
50	30 -60	40 -50	50 -60	0 -50	300
60	20 -80 300	40 -60	60 -60	0 -60	100
d_i	0	400	0	200	

	40	40	60	0	s_i
30	$\boxed{40}$ -30	$\boxed{30}$ -40 200	$\boxed{20}$ -70 300	$\boxed{0}$ -30	0
40	$\boxed{30}$ -50	$\boxed{40}$ -40	$\boxed{50}$ -50	$\boxed{0}$ -40	300
40	$\boxed{20}$ -60 300	$\boxed{40}$ -40	$\boxed{60}$ -40	$\boxed{0}$ -40	100
d_i	0	200	0	200	

	30	40	60	0	s_i
30	$\boxed{40}$ -20	$\boxed{30}$ -40 200	$\boxed{20}$ -70 300	$\boxed{0}$ -30	0
40	$\boxed{30}$ -40	$\boxed{40}$ -40 200	$\boxed{50}$ -50	$\boxed{0}$ -40	100
40	$\boxed{20}$ -50 300	$\boxed{40}$ -40	$\boxed{60}$ -40	$\boxed{0}$ -40	100
d_i	0	0	0	200	

	30	40	60	0	s_i
0	$\boxed{40}$ 10	$\boxed{30}$ -10 200	$\boxed{20}$ -40 300	$\boxed{0}$ 0	0
0	$\boxed{30}$ 0	$\boxed{40}$ 0 200	$\boxed{50}$ -10	$\boxed{0}$ 0 100	0
0	$\boxed{20}$ -10 300	$\boxed{40}$ 0	$\boxed{60}$ 0	$\boxed{0}$ 0 100	0
d_i	0	0	0	0	

اعداد بدست آمده در جدول نهایی یک جواب آغازین برای ما خواهد بود که در آن **z=2600** .

جواب بهینه

بعد از این که یک جواب آغازین به دست آوردیم به دنبال جواب بهینه هستیم. برای مثال قبل که جواب آغازین از روش راسل بدست آمده شروع، و طریقه ی بدست آوردن جواب بهینه را شرح میدهیم .ابتدا باید مقادیر u_i و v_j را حساب کنیم.

رابطه $c'_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_i)=0$ را برای متغیرهای پایه تشکیل می دهیم اگر از جواب بهینه به دست آمده ی روشن راسل استفاده کنیم داریم:

$c'_{12}=30-(u_1+v_2)=0$ $\qquad$ $c'_{13}=20-(u_1+v_3)=0$

$c'_{22}=40-(u_2+v_2)=0$ $\qquad$ $c'_{24}=0-(u_2+v_4)=0$

$c'_{31}=20-(u_3+v_1)=0$ $\qquad$ $c'_{34}=0-(u_3+v_4)=0$

یکی از u_i ها یا v_j ها را به دلخواه انتخاب کرده و مقدار صفر می دهیم و بقیه رابه دست می آوریم مثلا در این جا قرار می دهیم $u_1=0$ و بقیه را به دست می آوریم. $v_3=20$ $\quad$ $v_2=30$ $\quad$ $u_1=0$ $v_1=10$ $\quad$ $V_4=-10$

$u_3=10$ $\quad$ $u_2=10$

سپس c'_{ij} ها را با استفاده از رابطه $c'_{ij}=cij-(u_i+v_i)$ برای خانه های غیر پایه به دست می آوریم اگر این c'_{ij} ها غیر منفی بودند که شرط بهینگی برنامه ریزی برقرار است، در غیر این صورت اگر c'_{ij} منفی داشتیم شرط بهینگی برقرار نبوده و باید برای بهینه کردن جدول اقدام کنیم.

$c'_{ij}=cij-(u_i+v_i)$

$c'_{11}=40-(0+10)=30$

$c'_{21}=30-(10+10)=10$

$c'_{32}=40-(10+30)=0$

$c'_{23}=50- (10+20)=20$

$c'_{33}=60- (10+20)=30$

$c'_{14}=0- (0-10)=10$

مشاهده می شود که c'_{ij}ها همه مثبت هستند پس این جواب بهینه است.

حال برای بررسی جدولی که جواب پایه بهینه نباشد از جواب آغازین بدست آمده در روش گوشه ی شمال غربی استفاده می کنیم:

روش گوشه شمال غربی:

				s_i
40 →300	30 ↓200	20	0	500
30	40 →200	50 ↓100	0	300
20	40	60 →200	0 200	400
300	400	300	200	d_i

با استفاده از متغیر های پایه، مقادیر u_i و v_j را محاسبه می کنیم :

$u_1=0$ $u_2=10$ $u_3=20$

$v_1=40$ $v_2=30$ $v_3=40$ $v_4=-20$

و برای متغیر های غیر پایه داریم :

$c'_{13}=20-(0+40)=-20$

$c'_{14}=0-(0-20)=20$

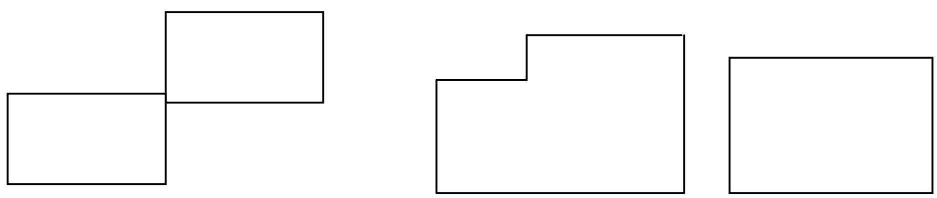
$c'_{21}=30-(10+40)=-20$

$c'_{24}=0-(10-20)=10$

$c'_{31}=20-(20+40)=-40$

$c'_{32}=40-(20+30)=-10$

چون همه ی مقادیر بدست آمده غیر منفی نشده اند پس جواب بهینه نیست. برای بهینه کردن جواب باید یک متغیر ورودی انتخاب کنیم. خانه ی مربوط به منفی ترین مقدار ورودی ما است . در این مثال x_{31} ورودی است. برای حفظ تعادل جدول و تعیین متغیر خروجی باید برخی خانه ها افزایش یا کاهش یابند. برای متغیر ورودی در جدول یک مسیر بسته پیدا نموده که به یکی از آَشکال زیر شبیه است:



در این مسیر بسته یکی از گوشه ها، خانه ی مربوط به متغیر ورودی و بقیه ی خانه ها باید پایه باشند در خانه ی ورودی علامت + و در بقیه به صورت یک در میان – و + قرار می دهیم .

40 - 300	30 + 200	20	0
30	40 - 200	50 + 100	0
20 +	40	60 - 200	0 200

حال ازمیان خانه هایی که دارای علامت منفی هستند کمترین مقدار xij را انتخاب کرده و آن مقدار را از خانه هایی که دارای علامت منفی هستند کم و به خانه های دارای علامت + اضافه می کنیم . خانه ای که مقدار xij آن صفر شود خروجی خواهد بود. اگر در بیش از یک خانه xij=0 شود یکی را به دلخواه انتخاب و آنرا غیرپایه و بقیه را با xij=0 بعنوان پایه در جدول حفظ می کنیم . در این مثال کمترین مقدار 200 است . پس از اعمال تغییرات جدول به شکل زیر خواهد بود :

40 100	30 400	20	0
30	40	50 300	0
20 200	40	60 0	0 200

حال با ا+ستفاده پایه ها مقادیر $\mathbf{u_i}$ و $\mathbf{v_j}$ را دوباره حساب می کنیم و مقدار $\mathbf{c'_{ij}}$ را برای خانه های غیر پایه بدست می آوریم:

$u_1=0$ $\quad$ $u_2=10$ $\quad$ $u_3=-20$

$v_1=40$ $\quad$ $v_2=30$ $\quad$ $v_3=80$ $\quad$ $v_4=20$

$c'_{13}=20-(0+80)=-60$

$c'_{14}=0-(0+20)=-20$

$c'_{21}=30-(10+40)=-20$

$c'_{24}=0-(10+20)=-30$

$c'_{22}=40-(10+30)=0$

$c'_{32}=40-(-20+30)=30$

$\mathbf{x_{24}}$متغیر ورودی است:

40 100	30 400	20	0
30	40	50 - 300	0 +
20 200	40	60 0 +	0 - 200

کمترین مقدار منفی 200 و خروجی x_{34} است :

40 100	30 400	20	0
30	40	50 100	0 200
20 200	40	60 200	0

$u_1=0$ $u_2=-30$ $u_3=-20$

$v_1=40$ $v_2=30$ $v_3=80$ $v_4=20$

$c'_{13}=20-(0+80)=-60$

$c'_{14}=0-(0+20)=-20$

$c'_{21}=30-(-30+40)=20$

$c'_{22}=40-(-30+30)=40$

$c'_{32}=40-(-20+30)=30$

$c'_{34}=0-(-20+20)=0$

ورودی x_{13} است:

40 - 100	30 400	20 +	0
30	40	50 100	0 200
20 + 200	40	60 - 200	0

خروجی x_{11} و کمترین مقدار 100 خواهد بود.

40	30 400	20 100	0
30	40	50 100	0 200
20 300	40	60 100	0

$u_1=0$ $u_2=30$ $u_3=40$

$v_1=-20$ $v_2=30$ $v_3=20$ $v_4=-30$

$c'_{11}=40-(0-20)=60$

$c'_{14}=0-(0-30)=30$

$c'_{21}=30-(30-20)=20$

$c'_{22}=40-(30+30)=40$

$c'_{34}=0-(40-30)=10$

$c'_{32}=40-(40+30)=-30$

x_{32} ورودی است:

40	30 - 400	20 + 100	0
30	40	50 100	0 200
20 300	40 +	60 - 100	0

خروجی x_{ij} و کمترین مقدار 100 است:

40	30 300	20 200	0
30	40	50 100	0 200
20 300	40 100	60	0

$u_1=0$ $u_2=30$ $u_3=10,\ v_1=10$ $v_2=30$ $v_3=20$ $v_4=-30$

$c'_{11}=40-(0+10)=30,\ c'_{14}=0-(0-30)=30$

$c'_{21}=30-(30+10)=-10,\ c'_{33}=60-(10+20)=30$

$c'_{22}=40-(30+30)=-20,\ c'_{34}=0-(10-30)=20$

$\mathbf{x_{22}}$ ورودی خواهد بود :

40	30 - 300	20 + 200	0
30	40 +	50 - 100	0 200
20 300	40 100	60	0

خروجی $\mathbf{x_{23}}$ و کمترین مقدار 100 است :

40	30 200	20 300	0
30	40 100	50	0 200
20 300	40 100	60	0

$u_1=0$ $u_2=10$ $u_3=10$

$v_1=10$ $v_2=30$ $v_3=20$ $v_4=-10$

$c'_{14}=0-(0-10)=10$

$c'_{11}=40-(0+10)=30$

$c'_{21}=30-(10+10)=10$

$c'_{23}=50-(10+20)=20$

$c'_{33}=60-(10+20)=30$

$c'_{34}=0-(10-10)=0$

مشاهده می شود که همه ی c'_{ij} غیر منفی هستند پس جدول نهایی بهینه خواهد بود. و مینیمم هزینه برابر 2600 است .

تحلیل حساسیت

الف : تحلیل حساسیت برای متغیر های غیر اساسی :

برای این مثال تجزیه تحلیل حساسیت انجام می دهیم برای بررسی تغییرات c_{ij}، اگر c_{ij} مربوط به متغیر ها غیر پایه باشد افزایش آن نا مطلوب است پس هر چه قدر که افزایش یابد پایه تغییر نمی کند و کاهش آن تا زمانی که $c'_{ij}\geq 0$ پایه تغییر نمی کند.

به طور مثال برای بررسی تغییرات **c11** که مربوط به یک خانه غیر پایه است داریم:

$$c'_{11}=c_{11}-10\geq 0 \quad => \quad c_{11}\geq 0$$

ب:تحیلی حساسیت برای متغیر های اساسی :

اگر c_{12} به اندازه α تغییر کند یعنی برابر شود با $30+\alpha$ آنگاه بعضی از u_i,v_i ها تغییر می کنند. که تغییرات ایجاد شده درصفحه بعد نشان داده شده است.

$u_1=0 \qquad u_2=10-\alpha \qquad u_3=10-\alpha$

$v_1=10+\alpha \qquad v_2=30+\alpha \qquad v_3=20 \qquad v_4=-10+\alpha$

پایه ها مقدار صفر دارند پس α به آنها اضافه و کم نمی شود و چون می خواهیم جدول بهینه باشد کافی است برای متغیرهای غیر پایه $c'_{ij}\geq 0$ باشند پس داریم:

$c'_{11}=40-(0+10+\alpha)=30-\alpha$

$c'_{14}=0-(0-10+\alpha)=10-\alpha$

$c'_{21}=30-(10-\alpha+10+\alpha)=10$

$c'_{23}=50-(10-\alpha+20)=20+\alpha$

$c'_{33}=60-(10-\alpha+20)=30+\alpha$

$c'_{34}=0-(10-\alpha-10+\alpha)=0$

و از آنجا نتیجه می شود :

$$30 - a \geq 0 \quad => \quad a \leq 30$$

$$10 - a \geq 0 \quad => \quad a \leq 10$$

$$20 + \alpha \geq 0 \quad => \quad \alpha \geq -20$$

$$30 + \alpha \geq 0 \quad => \quad \alpha \geq -30$$

بنابراین $-20 \leq \alpha \leq 10$ داریم: $10 \leq c_{12} \leq 40$.

دامنه تغییرات b_i :

اگر در مثال گفته شده b_1 تغییر پیدا کند و به $500 + \beta$ تبدیل شود یعنی عرضه یا ظرفیت تغییر کرده است. با این تغییر دیگر جدول متعادل نیست. این تغییر جنبه عملی ندارد. پس با تغییر عرضه تقاضا نیز باید تغییر کند. ما تقاضای موهومی را تغییر می دهیم. اگر فرض کنیم که تقاضای مشتری دوم هم به همان اندازه $(400+\beta)$ تغییر کند تقاطع سطر عرضه و ستون تقاضا پایه می باشد اگر β افزایش یابد پایه تغییر نمی کند و اگر β کاهش باید داشته باشیم:

$$\mathbf{200+\beta \geq 0 \quad => \quad \beta \geq -200}$$

اما اگر تقاطع پایه نباشد مثلا $\mathbf{500+\beta}$ با تقاضای $\mathbf{300+\beta}$ تقاطع آن ها خانه اول که غیر پایه است می باشد اگر مجاز بودیم که در خانه اول β داشته باشیم یک جواب قابل قبول داریم ولی پایه نمی باشد و نمی توان شرط بهینگی را آزمون کرد. بنابراین ما می خواهیم این β در خانه اول نباشد پس در خانه اول β- می گذاریم و این مستلزم است که در جدول حلقه ی زیر را داشته باشیم.

40 $-b$	30 $+b$ 200	20	0	b 500-
30	40 300	50	0	300
20 300+ b	40 100- b	60	0	400

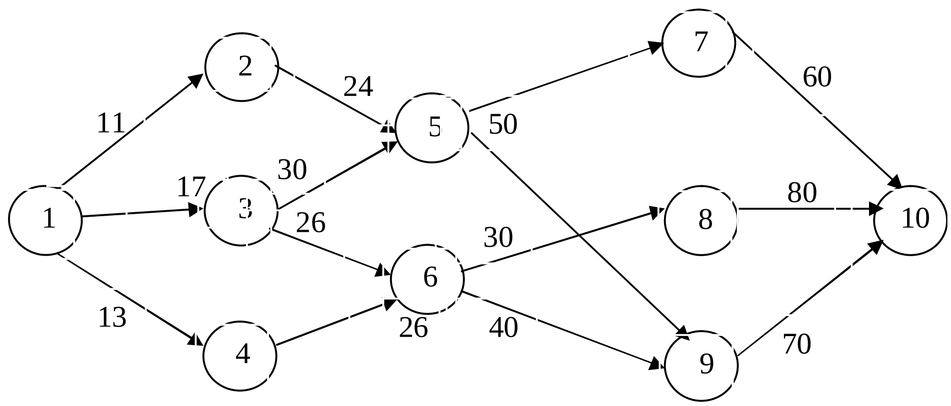
300+ b 400 300 200

باید داشته باشیم:

$$200+\beta\geq 0$$
$$300+\beta\geq 0 \quad => \quad -200\leq\beta\leq 100$$
$$100-\beta\geq 0$$

شبکه

شبکه مجموعه ای است از گره ها و کمان هایی که برخی از این گره ها را به هم مرتبط می کنند. اگر کمان ها جهت داشته باشند گوییم شبکه جهت دار است. مثال زیر یک نمونه شبکه جهت دار است :



مساله پیدا کردن کوتاهترین مسیر:

برای یافتن کوتاهترین مسیر از گره 1 به گره 10 در شبکه بالا می توان مدل ریاضی زیر را نوشت :

$$\text{Min } z = \Sigma\Sigma \; c_{ij}\, x_{ij} = 11x_{12}+17x_{13}+13x_{14}+\ldots+80x_{8,10}+70x_{9,10}$$

$$\text{s.t.}$$

$$x_{12}+x_{13}+x_{14}=1$$

$$x_{12}-x_{25}=0$$

.

.

.

$$X_{59}+X_{69}-x_{9,10}=0$$

$$x_{7,10}+x_{8,10}+x_{9,10}=1$$

$$0\le x_{ij}\le 1$$

$x_{ij}=$ میزان جریان از گره i به گره j و $c_{ij}=$ طول (هزینه) مربوطه از گره i به گره j

گره هایی که نه تولید و نه عرضه دارند (هم کمان ورودی دارند و هم کمان خروجی) گره های واسطه نامیده میشوند . مشاهده می شود که مقدار سمت راست گره های واسطه صفر است زیرا میزان جریانی که به گره وارد می شود با میزانی که از آن خارج می شود برابر خواهد بود . برای گره مبداء، عرضه 1 واحد و برای گره مقصد نیز تقاضا 1 واحد لحاظ می شود .

برای این شبکه می توان جدول زیر را رسم کرد که به تعداد گره ها در جدول سطر و ستون خواهیم داشت . در خانه ی **ij** ام عدد مربوط به کمان اتصال گره **i** به گره **j** نوشته می شود . در مناطقی که کمان نداریم هزینه**M** می باشد و هزینه انتقال هر واحد کالا از هر گره به خودش برابر صفر خواهد بود .

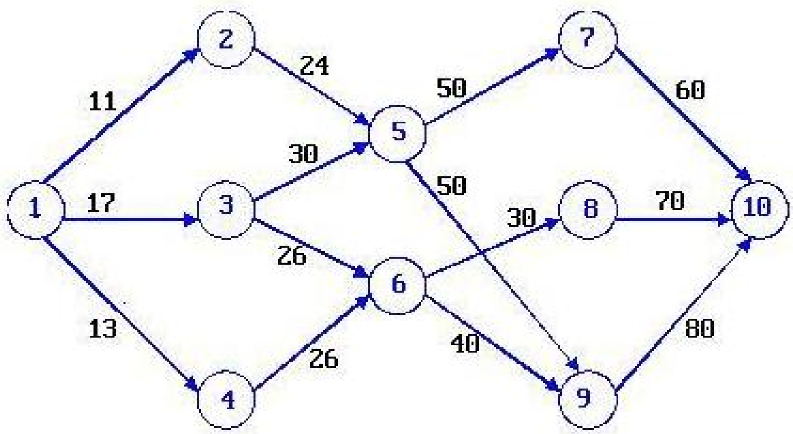
										Supply
0	11	17	13	M	M	M	M	M	M	2
M	0	M	M	24	M	M	M	M	M	1
M	M	0	M	30						1
			0							1
				0						1
					0					1
						0				1
							0			1
								0		1
									0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	<<Demand

برای یافتن کوتاهترین مسیر در یک شبکه راه حلهای ویژه وجود دارد که یکی از آنها روش دایکسترا میباشد که در ذیل آمده است.

روش (Dijkstra's Algorithm)

در این روش ابتدا کل مجموعه گرهها را به 2 زیر مجموعه تقسیم می کنیم:

زیر مجموعه گره های حل شده حاوی گره مبداء و زیر مجموعه گره های حل نشده حاوی بقیه گرهها. سپس در هر تکرار حداقل یک گره به گره های حل شده اضافه مکنیم تا هنگامی که مقصد به گره حل شده تبدیل شود که آنگاه حل ما کامل شده است.



ابتدا باید نزدیکترین گره حل شده به گره حل نشده را بیابیم (منظور طول از مبدا است نه طول خود کمان). سپس باید ببینیم کدام گره حل نشده به مبدا نزدیکتر است و آنرا از فهرست گره های حل نشده خارج و به فهرست گره های حل شده اضافه کنیم. آنگاه توجه می کنیم که کدام گره های حل نشده مستقیما به گره های حل شده مرتبط هستند و کدام یک از آنها به مبدا نزدیکتر است. اگر در هنگام مقایسه، دو یا چند گره کمترین اندازه را داشته باشند همه آنها را از فهرست گره های حل نشده خارج و به فهرست گره های حل شده اضافه می کنیم .

مجموعه گره‌های حل شده	مجموعه گره‌های حل نشده
{1}	{2,3,…,10}
{1,2}	{3,4,…,10} کوتاهترین فاصله گره 1 تا 2 برابرست با 11
{1,2,4}	{{3,5,…,10} کوتاهترین فاصله گره 1 تا 4 برابرست با 13
{1,2,3,4}	{{5,6,…,10} کوتاهترین فاصله گره 1 تا 3 برابرست با 17
{1,2,3,4,5}	{{6,7,…,10} کوتاهترین فاصله گره 1 تا 5 برابرست با 35
{1,…,6}	{{7,8,9,10} کوتاهترین فاصله گره 1 تا 6 برابرست با 39
{1,…,6,8}	{7,9,10}کوتاهترین فاصله گره 1 تا 8 برابرست با 69
{1,…,6,8,9}	{7,10} کوتاهترین فاصله گره 1 تا 9 برابرست با 79
{1,…,9}	{10} کوتاهترین فاصله گره 1 تا 10 برابرست با 145
{1,2,…,10}	

با توجه به توضیحات بالا می توانیم طول کوتاهترین مسیر گره 1 تا 10 را محاسبه کنیم که 145 می باشد.

مساله پیدا کردن طولانی ترین مسیر:

روش پیدا کردن طولانی ترین مسیر:

ابتدا با انجام حرکت پیشرو زودترین زمانی که یک گره می تواند اتفاق بیفتد را محاسبه کنید.

زودترین زمان اتفاق گره $t_2 = 11$ است و زودترین زمان اتفاق گره $t_3 = 17$ می باشد. (بیشترین مقدار را اندازه می گیریم.)

بنابراین اندازه طولانی ترین مسیر 167 می باشد. حال خود مسیر نیز مورد نیاز است (مسیر بحرانی) فعالیت هایی که در مسیر قرار می گیرند فعالیت های بحرانی هستند.

در یک حرکت پس رو برای هر گره می خواهیم عددی را پیدا کنیم که دیر ترین زمانی باشد که می تواند اتفاق بیفتد ولی پروژه دچار تاخیر نگردد.

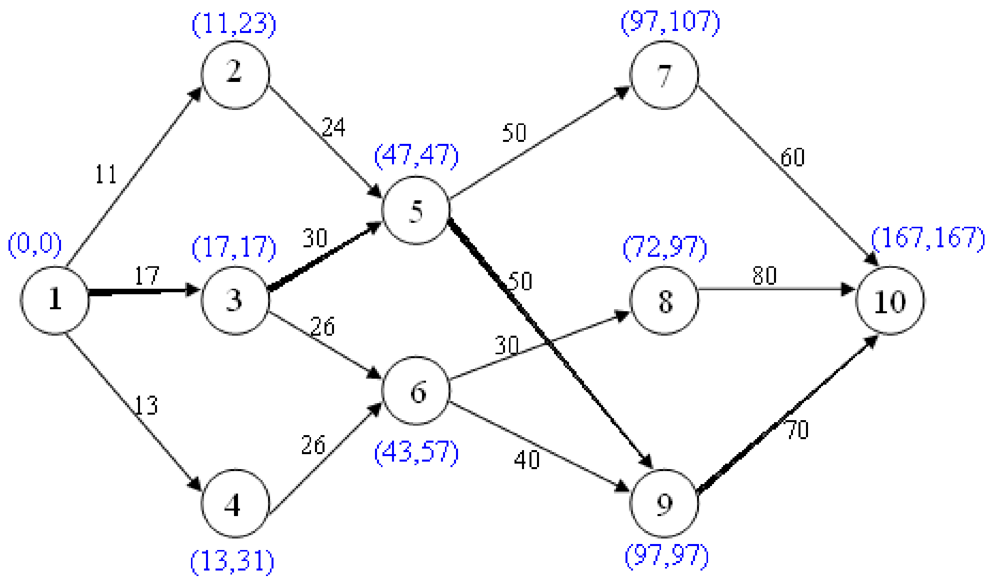
در حرکت برگشت باید کمترین اندازه را بگیریم. این عدد نمی تواند از عدد پیش رو کوچکتر باشد.

فعالیت های بحرانی:

فعالیت بحرانی فعالیتی است (کمان بحرانی کمانی است) که "دو عدد گره مبداء آن برابر" و "دو عدد گره انتهائی آن نیز برابر" باشند و اختلاف عدد انتهایی و ابتدایی گره‌های آن کمان برابر با طول کمان مربوطه باشد.

بنابراین فعالیت های واقع در مسیر $1-3-5-9-10$ فعالیت های بحرانی هستند.

فعالیت های دیگر را فعالیت های دارای شناوری می گوییم.



رسم شبکه کار نما:

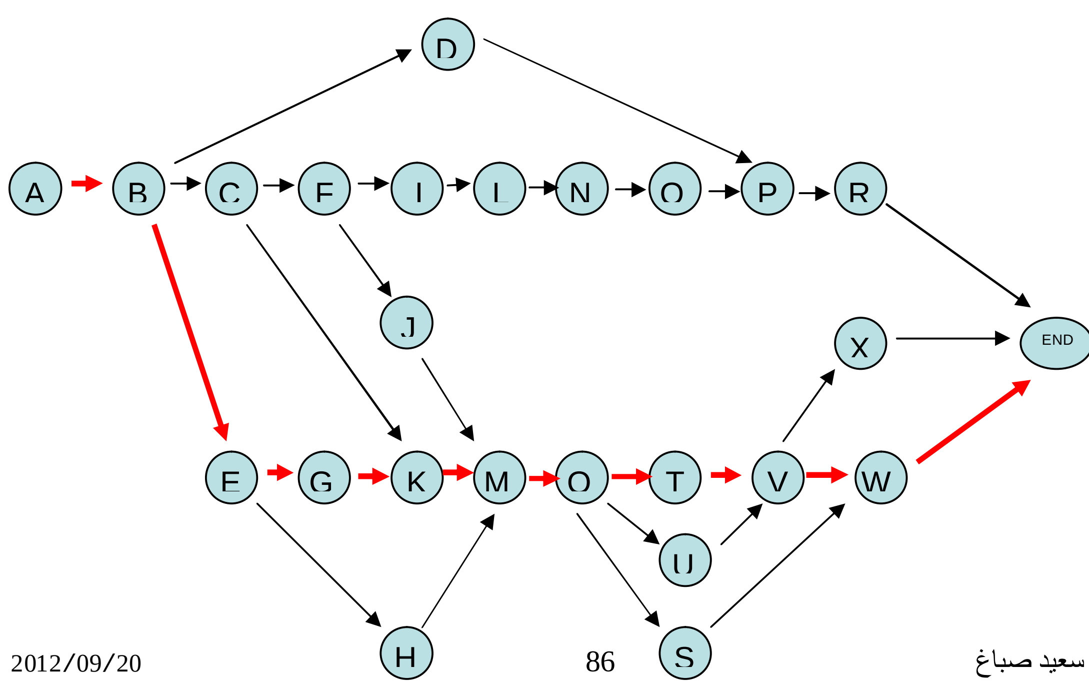
در این جا فعالیت ها به شکل گره ها هستند و کمان ها روابط پیش نیازی هستند که در مساله آمده است. در صورت نیاز یک گره (فعالیت) موهومی شروع و یک گره (فعالیت) موهومی پایانی را به جدول اضافه می کنیم تا شبکه یک گره شروع و یک گره پایانی داشته باشد. در صفحه بعد اطلاعات یک پروژه ساخت خانه و شبکه کار نمای آن آمده است.

رسم شبکه واقعه نما:

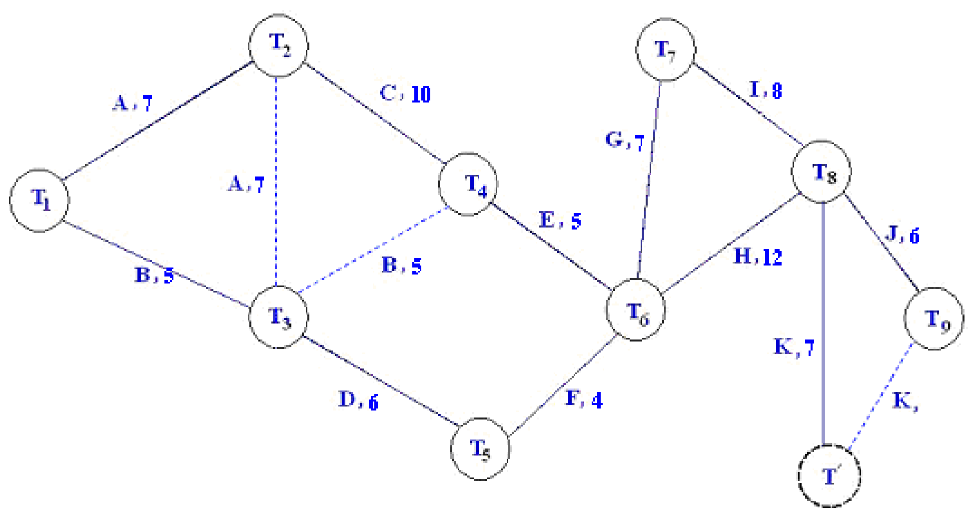
برای رسم شبکه واقعه نما به تعداد t ها گره داریم. ابتدا خروجی های گره ها را مشخص می کنیم به این صورت که فعالیت هائی که زودترین زمان شروع آنها t مربوطه است خروجی آن گره می دانیم. حال برای اتصال خروجی ها باید به پیش نیاز ها نگاه کنیم. بهتر است حتی المقدور کمان ها یکدیگر را قطع نکنند.

Activity	Description	Predecessors	Time
A	Excavation, pour footers	--	4
B	Lay foundation	A	3
C	Frame and roof	B	4
D	Lay drain tiles	B	2
E	Sewer (floor) drains	B	2
F	Install insulation	C	4
G	Pour basement floor	E	3
H	Rough plumbing, pipes	E	4
I	Install windows	F	3
J	Rough electrical wiring	F	2
K	Install furnace, air conditioner	C,G	5
L	Exterior brickwork	I	6
M	Install plasterboard, mud, plaster	J,H,K	8
N	Roof shingles, flashing	L	3
O	Attach gutters, downspouts	N	2
P	Grading	D,O	3
Q	Lay subflooring	M	4
R	Lay driveway, walks, landscape	P	6
S	Finish carpentry	Q	5
T	Kitchen cabinetry, sink, cabinetry	Q	4
U	Bathroom cabinetry, fixtures	Q	3
V	Painting (interior and exterior)	T,U	6
W	Finish wood floors, lay carpet	V,S	5
X	Final electrical, light fixtures	V	3

شبکه کار نمای پروژه ساخت خانه:



فعالیت	پیشنیاز	زمان انجام فعالیت واحد مربوطه	زودترین زمان شروع
S			
A	S	7	T_1
B	S	5	T_1
C	A	10	T_2
D	A,B	6	T_3
E	B,C	5	T_4
F	D	4	T_5
G	E,F	7	T_6
H	E,F	12	T_6
I	G	8	T_7
J	H,I	6	T_8
K	H,I	7	T_8
Z	J,K		T_9



نکته: برای هر فعالیت یک کمان داریم. حال با داشتن این شبکه باید طولانی ترین مسیر را در آن پیدا کرده و بعد از آن مسیر بحرانی را بیابیم . که روش آن قبلا توضیح داده شد .

مساله روش حداکثر جریان:

روش حداکثر جریان:

در شکل ذیل فرض کنید که:

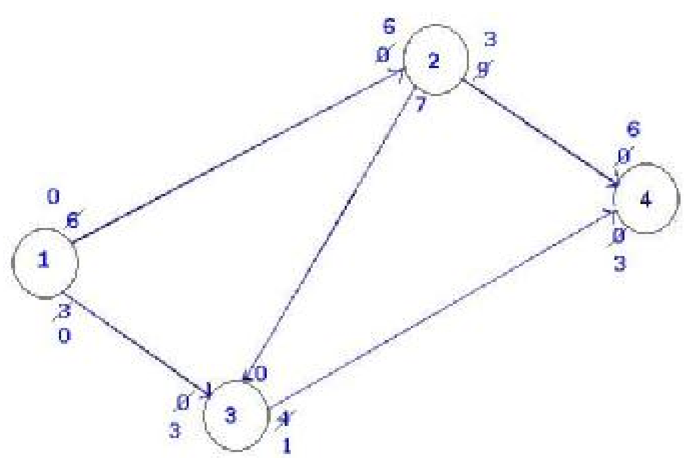
t= میزان جریان از گره 1 به گره 4

x_{ij}=میزان جریان از گره i به گره j

با اضافه کردن کمان فرضی احتیاجی به t نداریم. چون همان میزان خارج شده دوباره وارد می شود.

با آزمون و خطا مسیری می یابیم که در آن جریان مثبت باشد . حداکثر جریان در مسیر برابر است با حداقل ظرفیت کمانهای موجود در مسیر .این مقدار را از عدد ابتدایی کمان کم و به عدد انتهایی آن اضافه می کنیم (هر جریانی که در نظر می گیریم باید جهت عکس آن را هم در نظر می گیریم تا امکان اصلاح وجود داشته باشد . این مرحله را تکرار می کنیم تا آنجایی که هیچ مسیر با جریان مثبت از مبدا به مقصد وجود نداشته باشد . می توان از جریان با جهت عکس هم استفاده کرد . که این مربوط به زمانی است که هنوز می توان از مبدا جریان ارسال کرد اما از مسیر های رفت نمی توان جریانی به مقصد رساند لذا از ظرفیتهای برعکس (عدد انتهایی هر کمان) استفاده می کنیم .

مجموع جریانهایی که به مقصد فرستاده می شود حداکثر جریانی که می تواند از شبکه عبور کند را نشان می دهد .



مثال:

$$\text{Max } z=t$$

$$\text{s.t} \quad x_{12}+x_{13}=t$$

$$x_{13}+x_{23}=x_{34}$$

$$x_{12}=x_{23}+x_{24}$$

$$x_{24}+x_{34}=t$$

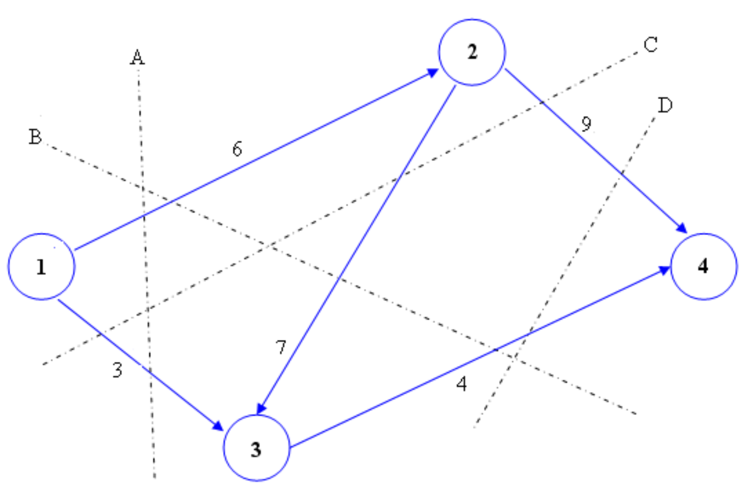
$$0 \le x_{ij} \le u_{ij}$$

میزان جریان ارسالی : 6 واحد   مسیر : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$

میزان جریان ارسالی : 3 واحد   مسیر : $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$

اکنون همه ظرفیت هایی که در جهت مثبت قرار دارند برای گره 1 صفر شده است و این نشان می دهد که ما قادر به ارسال جریان دیگری از گره 1 نیستیم . پس ماکزیمم جریان در این شبکه برابر 3+6 یعنی 9 واحد می باشد.

برش:جدا کردن تمامی گره ها به دو گروه مجزا بطوریکه مبدا در یک گروه و مقصد در گروه دیگر باشد (مبدا و مقصد در یک گروه نیستند) برش نامیده نمی شود . مجموعه ظرفیتهای بر روی این شاخه ها در جهت گره مبدا به مقصد " ظرفیت برش" نامیده می شود .



برش	گروه مبدأ	گروه مقصد	ظرفیت برش
A	1	2,3,4	9
B	1,3	2,4	10
C	1,2	3,4	19
D	1,2,3	4	13

قضیه: حداکثر جریان در مساله برابر است با حداقل برش.

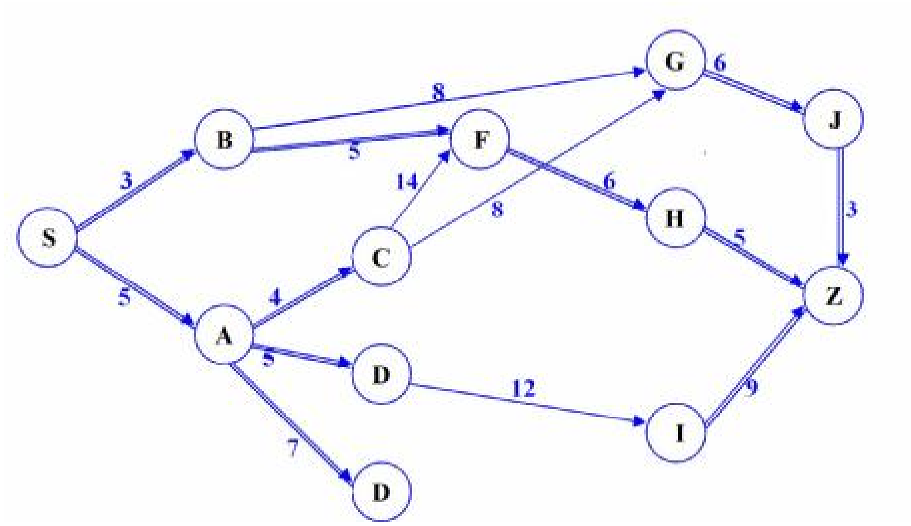
ولی این قضیه برای شبکه های بزرگ قابل استفاده نیست لذا از روش سعی و خطا با امکان اصلاح استفاده می کنیم.

کوتاهترین درخت گسترش:

یک درخت یک شبکه است که همه گره ها به هم مرتبط هستند ولی حلقه ندارد (شبکه جهت ندارد).

برای حل درخت گسترش از هر جا که بخواهیم می توانیم شروع کنیم.

پس از انتخاب یک گره به عنوان مبدا نزدیکترین گره به آن را انتخاب می کنیم. حال از گره های وصل نشده آن گره ای را که به گره های وصل شده نزدیک تر است می یابیم و این کار را آنقدر ادامه می دهیم تا همه گره ها وصل شوند.

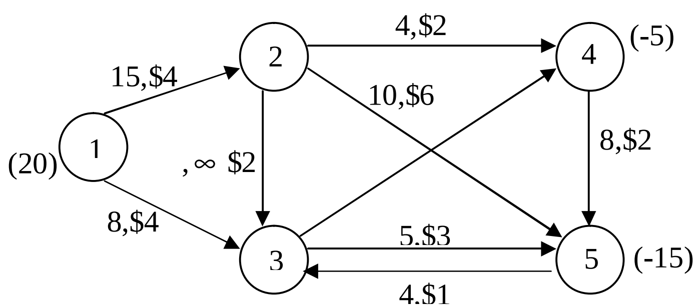


مساله جریان با حداقل هزینه (در شبکه با کمان های ظرفیت دار):

برای حل این شبکه ابتدا یک جواب پایه اولیه پیدا می کنیم. اگر شبکه داده شده پیچیده باشد می توانیم از کمان های مصنوعی استفاده کنیم.

چه زمانی یک کمان پایه تلقی می شود؟ هر گاه متغیری به حد بالایش رسید می توانیم آن را متغیر غیر پایه کنیم.

اگر:



در این مساله روی هر کمان دو عدد نوشته می شود که اولی نشان دهنده ظرفیت کمان و دومی بیان کننده هزینه ارسال یک واحد از طریق کمان را نشان می دهد .

برای حل چنین شبکه ای باید ابتدا یک جواب پایه بیابیم یک جواب پایه همیشه به صورت یک درخت است .بنابراین با سعی و خطا یک جواب اولیه بدست می آوریم که عرضه و تقاضای مبدا و مقصد را برآورده کند .

در این راستا می توان از کمانهای مصنوعی نیز استفاده کرد که هزینه این کمانها را M در نظر می گیریم . در صورت نیاز می توان از کمانهایی با اندازه 0 نیز استفاده کرد.

حال باید شرط بهینگی را در جواب بدست آمده بررسی کنیم .

برای هر گره یک y_i در نظرمی گیریم و برای هر کمان قرار می دهیم:

$$C_{ij}=c_{ij}-y_i+y_j$$

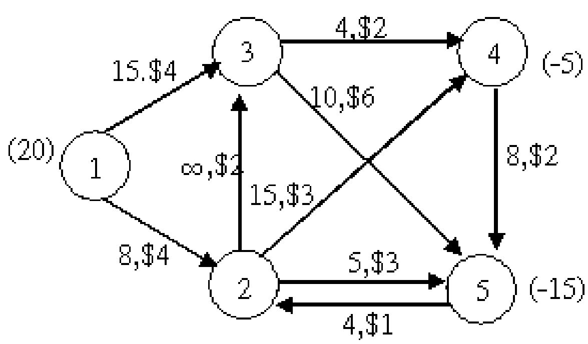
برای کمانهای پایه C_{ij} صفر است بنابراین از روی معادلاتی که برای هر کمان پایه می نویسیم و قرار دادن $y_1=0$ می توان به راحتی مقادیر y_i را بدست آورد .

حال برای باقی کمانها دو حالت داریم:

1- کمانهای غیر پایه که در حد بالای خود قرار دارند
2- کمانهای غیر پایه با مقدار صفر

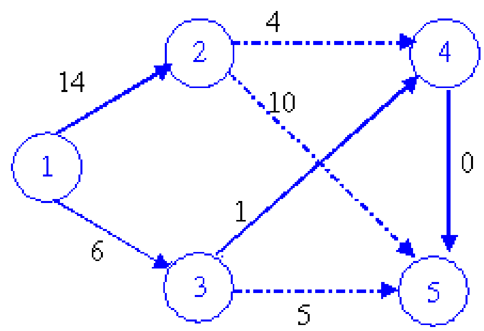
برای کمانهایی که در حد بالا قرار دارند شرط بهینگی این است که $C_{ij} \le 0$ باشد و برای کمانهای غیر پایه با مقدار صفر شرط بهینگی این است که $C_{ij} \ge 0$. هر کدام از کمانهایی که شرط بهینگی را نداشت می تواند به عنوان ورودی به پایه مورد استفاده قرار بگیرد .

مثال:



برای حل این شبکه ابتدا یک جواب پایه اولیه پیدا می کنیم. اگر شبکه داده شده پیچیده باشد می توانیم از کمان های مصنوعی استفاده کنیم.

هر گاه متغیری به حد بالایش رسید می توانیم آن را متغیر غیر پایه کنیم.



کمانهای 12 و 13 و 34 و 45 پایه هستند در اینجا باید توجه کنید که از کمان پایه با مقدار صفر هم استفاده کردیم برای این کمانها داریم: $C_{ij}=c_{ij}-y_i+y_j=0$

پس :

$C_{12} = c_{12} - y_1 + y_2 = 4 + y_2 = 0 \qquad y_2 = -4 \, , \, y_1 = 0$

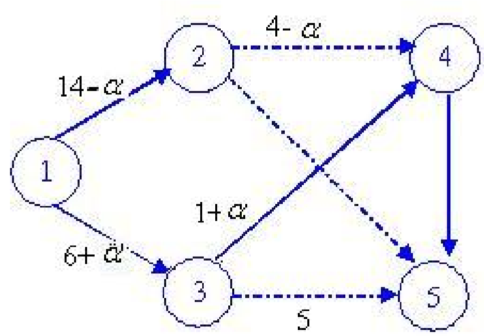
$C_{13} = c_{13} - y_1 + y_3 = 4 + y_3 = 0 \qquad y_3 = -4$

$y_4 = -5 \, , \, y_5 = -7$

حال C_{ij} ها را برای کمانهای غیر پایه محاسبه می کنیم

$C_{24} = 2 - (-4) - 5 = 1$

کمان 24 یک کمان غیر پایه است که در حد بالای خود قرار دارد و شرط بهینگی برای آن این است که مقدار C_{24} آن باید نامثبت باشد بنابراین این کمان شرط بهینگی را ندارد و یک ورودی به پایه محسوب می شود. بنابراین برای یافتن جواب پایه بعدی 4 را به 4-a تبدیل کنیم. بوسیله کمانهای دیگر این کمبود را جبران می کنیم داریم :



چون کمان 13 بیشتر از 8 نمی تواند باشد حداکثر میزان a = 2 است و بنابراین کمان 24 ورودی به پایه و کمان 13 خروجی از پایه می شود.

برای دومین جواب بدست آمده نیز شایط بهینه بودن را چک می کنیم و ادامه می دهیم تا آنجا که جواب ما جواب بهینه باشد.

نمونه سوالات امتحانی

76/12/24

1- مسئله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
&Max\ Z = CX\\
&s.t.\ \ AX \le b\\
&\qquad X \ge 0
\end{aligned}
$$

اگر یکی از محدودیت های مسئله فوق را حذف کنیم در مورد منطقه قابل قبول و مقدار بهینه تابع هدف مسئله جدید چه می توان گفت؟

2- در یکی از جداول روش سیمپلکس ضریب یکی از متغیرها در تمام محدودیت ها همگی صفر یا منفی است. این امر در مورد منطقه قابل قبول و مقدار بهینه تابع هدف چه اطلاعاتی به ما می دهد؟

3- مقدار بهینه تابع هدف و جواب بهینه مسئله زیر را بدون استفاده از روش سیمپلکس بدست آورید. سپس دامنه های تغییرات ضریب X_2 در تابع هدف و مقدار سمت راست محدودیت سوم را بطوریکه پایه بهینه تغییر نکند، تعیین کنید.

$$
\begin{aligned}
&Min\ \ \ Z = 2X_1 + X_2\\
&s.t.\begin{cases}
3X_1 - X_2 = -16\\
-2X_1 - X_2 \le -6\\
\qquad X_1 \ge -4
\end{cases}
\end{aligned}
$$

4- مسئله زیر و جدول بهینه آن را در نظر بگیرید و سپس دامنه تغییرات C_1، ضریب X_1 در تابع هدف و b_1 مقدار سمت راست اولین محدودیت را بطوریکه پایه بهینه تغییر نکند بدست آورید.

$$
\begin{aligned}
&Max\ Z = 5X_1 + 4X_2 + 2X_3 + 3X_4\\
&s.t.\begin{cases}
\quad 2X_1 + 3X_2 - X_3 \le 10\\
X_1 + 2X_2 + 3X_3 + X_4 = 18\\
\ -X_1 + 5X_2 + 4X_3 \le 25\\
\quad X_j \ge 0\ ,\ j = 1,\dots,4
\end{cases}
\end{aligned}
$$

پایه	مقدار	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	a_1	S_3
Z	64	0	5	6	0	1	M+3	0
X_1 X_4 S_3	5 13 30	1 0 0	1.5 0.5 7.5	-0.5 3.5 3.5	0 1 0	0.5 -0.5 0.5	0 1 0	0 0 1

در جدول فوق S_1 متغییر کمبود اولین محدودیت می باشد.

5- در یک مسئله رژیم غذائی نیاز به حداقل 21 واحد ویتامین A و حداقل 12 واحد ویتامین B می باشد. برای این منظور 5 نوع ماده غذائی موجود است که خصوصیات هر کدام در زیر آمده است. مدل خطی مسئله مزبور با هدف حداقل کردن هزینه مواد غذائی و همچنین اطلاعات حل کامپیوتری آن نیز داده شده است. با توجه به اطلاعات داده شده به سوالات ذیل پاسخ دهید. سوالات متصل از هم می باشند.

$$Min \quad Z = 20X_1 + 20X_2 + 31X_3 + 11X_4 + 12X_5$$
$$s.t.\begin{cases} X_1 + X_3 + X_4 + 2X_5 \geq 21 \\ X_2 + 2X_3 + X_4 + X_5 \geq 12 \\ \qquad X_j \geq 0\ ,\quad j = 1,\dots,5 \end{cases}$$

X_j = میزان استفاده از غذای j به واحد مربوطه

ماده غذائی	1	2	3	4	5
ویتامین A در هر واحد غذا	1	0	1	1	2
ویتامین B در هر واحد غذا	0	1	2	1	1
هزینه هر واحد غذا به تومان	20	20	31	11	12

جواب بهینه :

$$X_1^* = X_2^* = X_3^* = 0\ ,\quad X_4^* = 3\ ,\quad X_5^* = 9\quad ,\quad Z^* = 141$$

شبه قیمت محدودیت اول = 1 و شبه قیمت محدودیت دوم = 10

حدود مقادیر سمت راست

محدودیت	حد	مقدار فعلی	حد بالا

	پائینی		
1	12	21	24
2	10.5	12	21

حدود ضرائب تابع هدف

متغییر	حد پائین	مقدار فعلی	حد بالا
X_1	1	20	$+\infty$
X_2	10	20	$+\infty$
X_3	21	31	$+\infty$
X_4	6	11	12
X_5	11	12	22

ضرائب متغیرها در سطر تابع هدف جدول بهینه(هزینه تقلیل یافته)

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
19	10	10	0	0

الف- اگر بدون توجه به خصوصیات ماده غذائی نوع دو یک واحد ار آن مورد نیاز باشد در اینصورت مقدار بهینه تابع هدف چه مقدار تغییر می کند؟

ب- اگر قیمت خرید هر واحد غذای نوع یک ، 5 تومان شود در مقدار بهینه تابع هدف چه مقدار تغیر خواهیم داشت؟

ج- اگر نیاز به ویتامین B از 12 به 16 واحد افزایش یابد و یک داروخانه محلی حاضر باشد که 4 واحد ویتامین B را به قیمت هر واحد 15 تومان بفروشد ، آیا قبول این پیشنهاد اقتصادی است؟چرا؟

د- اگر نیاز به حداقل 18 واحد ویتامین A و حداقل 14 واحد ویتامین B باشد آنگاه مقدار بهینه تابع هدف چه مقدار می شود؟

ه- اگر قیمت مواد غذائی بصورت زیر باشد آنگاه مقدار بهینه تابع هدف چه مقدار می شود؟

ماده غذائی	1	2	3	4	5
قیمت جدید هر واحد	25	30	28	10	14

و- مسئله فوق حداقل چند نقطه گوشه ای دارد؟

6- یک کارخانه تولید وسائل ورزشی دارای 4 خط مونتاژ است. خط اول چرخ تولید می کند و ظرفیت آن 100 چرخ در یک روز(شیفت) کاری است.خط دوم زنجیر تولید می کند و ظرفیت آن 80 زنجیر در یک روز کاری است. خط سوم دوچرخه تولید می کند که نیاز به یک زنجیر و دو چرخ دارد و بالاخره خط چهارم سه چرخه تولید می کند که نیاز به یک زنجیر و سه چرخ دارد. این خطوط تولید(مونتاژ) برای تولید هر واحد از محصول خود به ترتیب به 1 ، 1 ، 2 ، 3 نفر کارگر نیاز دارند و کارخانه دارای 120 نفر کارگر است. قیمت هر دوچرخه 6 و قیمت هر سه چرخه 9 واحد پولی است و به علاوه هر زنجیر تولید شده را به قیمت یک واحد و هر چرخ را به قیمت 1.8 واحد در بازار می توان فروخت و یا به ترتیب به قیمت های 1.5 و 2 واحد پولی می توان از بازار خرید. برنامه تولید این کارخانه را برای کسب حداکثر درآمد بصورت یک برنامه خطی فرموله کنید.

73/12/23

1- با نوشتن ص یا غ در ابتدای هر سوال ، صحیح یا غلط بودن آنرا مشخص کنید.

هر جواب درست یک نمره و هر جواب غلط 0.5- نمره دارد.

- اگر در جواب پایه غیر بهینه فعلی مقدار یکی از متغییرها پایه صفر باشد انجام عملیات چرخش لولائی در آن جدول مقدار تابع هدف را تغییر نمی دهد.
- اگر $\acute{X}, \overline{X}$ دو جواب پایه قابل قبول و مجاور باشند حداکثر m+1 متغییر مثبت در $\acute{X}, \overline{X}$ وجود دارد. M تعداد محدودیت ها می باشد.
- اگر یک مسئله برنامه ریزی خطی دارای جواب بهینه باشد منطقه قابل قبول آن محدود است.
- تعداد جوابهای بهینه هر برنامه خطی همواره قابل شمارش است.
- اگر در عملیات چرخش لولائی حداقل نسبت صفر گردد مقدار تابع هدف تغییر نمی کند. بطور کلی ، مقدار حداقل نسبت ، میزان تغییر تابع هدف را مشخص می کند با رابطه یک واحد به یک واحد.
- در روش سیمپلکس اولیه عنصر چرخش لولائی همواره مثبت و در روش سیمپلکس همزاد عنصر چرخش لولائی همواره منفی است.
- اگر در عملیات چرخش لولائی ، سطر لولا یگانه باشد مقدار تابع هدف تغییر می کند.
- اگر در یک مدل خطی سمت راست یکی از محدودیتها یک واحد افزایش یابد منطقه قابل قبول آن بزرگتر می گردد.
- اگر در یکی از مراحل روش سیمپلکس متغییری از پایه خارج شود در مرحله بعد این متغییر وارد پایه نخواهد شد.
- در روش سیمپلکس اگر سطر لولا یگانه نباشد انجام چرخش سبب تباهیدگی می شود.
- در روش سیمپلکس اولیه حداقل نسبت تضمین می کند که قابل قبول بودن جواب حفظ شود.

- در حل برنامه های خطی هنگامی از روش دو مرحله ای یا Mبزرگ استفاده می شود که پایه اولیه قابل قبول در دسترس نباشد.
- اگر در یک جدول سیمپلکس ضرایب متغییری در تمام محدودیت ها غیر مثبت باشد منطقه قابل قبول نامحدود است.
- اگر بین مسائل خطیP و D رابطه همزادی وجود داشته باشد در صورتی که هر یک از آنها جواب بهینه محدود داشته باشد دیگری نیز دارد.
- در یک مدل خطی اگر یکی از محدودیتها را حذف کنیم منطقه قابل قبول بزرگتر می شود.
- اگر جواب(های) بهینه مسئله اولیه تباهیده نباشد جواب بهینه مسئله همزاد آن یگانه است.
- اگر یک برنامه خطی غیرممکن باشد همزاد آن نامحدود است.
- اگر یک برنامه خطی غیر ممکن باشد همزاد آن نا محدود است.
-
- اگر در یک برنامه خطی $Z \to -\infty$ رود با تغییر b به b' می توان جواب بهینه محدود داشت :

$$\begin{aligned} &Min\ \ Z = CX \\ &s.t. \quad AX = b \\ &\qquad\ X \geq 0 \end{aligned}$$

2- مسئله زیر و جواب ناقص آن داده شده است

$$Min\ \ Z = 2X_1 + X_2 + 3X_3$$

$$s.t.\begin{cases} 5X_1 + 2X_2 + 7X_3 = 15 \\ 3X_1 + 2X_2 + 5X_3 \geq 10 \\ \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

پایه	مقدار	X_1	X_2	X_3	$\bar{X}_4$	X_5	$\bar{X}_6$
-Z	-25/4	a	b	0	M-1/4	1/4	M-1/4
X_1	5/4	1	-1	0	5/4	7/4	-7/4
X_2	5/4	0	1	1	-3/4	C	5/4

در جدول فوق $\bar{X}_4$ متغییر مصنوعی محدودیت اول و X_5 و $\bar{X}_6$ متغییر مازاد و مصنوعی محدودیت دوم است. تنها با توجه به جدول فوق به سوالات پاسخ دهید. در صورت حل مجدد نمره ای نمی گیرید.

الف- مقدار a برابر است با   چرا؟

ب- مقدار b برابر است با   چرا؟

ج- مقدار c برابر است با   چرا؟

د- شبه قیمت محدودیت دوم برابر است با   چرا؟

3- همزاد مسئله زیر را مقابل آن بنویسید.

$$Min\ -Z = 5X_1 - 3X_2 + X_3 - X_4$$

$$s.t.\begin{cases} -2X_1 - X_2 + 5X_3 + X_4 = 6 \\ 3X_1 + 2X_2 - 4X_3 + 7X_4 = 12 \\ X_1 + X_2 + X_4 \le 55 \\ X_1 \ge 0\ , X_2\quad free,\ X_3 \le 0,\ \ X \ge 0 \end{cases}$$

4- جدول اولیه و بهینه مسئله ای که تابع هدف آن(سود) می بایست حداکثر گردد در زیر داده شده است.

جدول اولیه

پای‌ه	مقدار	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3
Z	0	-8	-14	-30	-50			
S_1	800	1	2	10	16	1		
S_2	1000	1.5	2	4	5		1	
S_3	340	0.5	0.6	1	2			1

جدول بهینه

پای‌ه	مقدار	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3
Z	6000			28	40	5	2	
X_2	200		1	11	19	15	-1	
X_1	400	1		-12	-22	-2	2	
S_3	20			0.4	1.6	0.1	-0.4	1

در جداول فوق S_3, S_2, S_1 متغییرهای کمبود محدودیتهای 1و2و3 می باشند.

الف- برای اینکه انجام فعالیت سوم زیان نداشته باشد حداقل C_3 چیست؟

ب- برای اینکه انجام فعالیت دوم ادامه یابد حداقل C_2 چیست؟

ج- اگر میزان b_1 قطعی نباشد ، برای چه مقادیر b_1 انجام فعالیتهای اول و دوم امکان پذیر است؟

د- اگر برای هر واحد افزایش b_1 می بایست چهار واحد هزینه گردد ، آیا افزایش b_1 با صرفه است؟

م- اگر فعالیت جدید X_5 هر واحدش ، چهار واحد از منبع یک ، چهار واحد از منبع دو و یک واحد از منبع سه لازم باشد ، ضریبش در تابع هدف ، C_5، چه مقدار باشد تا انجام آن با صرفه باشد؟

ن- اگر $C_1 = 12 \quad , \quad C_2 = 44$ گردد آیا پایه بهینه تغییر می کند؟چرا؟

5-مسئله زیر را به روش M بزرگ حل کنید.

$$Min \quad Z = 3X_1 + 2X_2 + 4X_3$$
$$s.t. \begin{cases} 2X_1 + X_2 + 3X_3 = 10 \\ 3X_1 + 3X_2 + 5X_3 = 20 \\ \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

6-جدول ذیل مربوط است به یک مسئله با متغییرهای محدود شده $0 \leq X \leq u$ که تابع هدف آن می بایست حداکثر گردد.
یک تکرار عملیات سیمپلکس محدود شده را انجام دهید.

پایه	حد بالا	10	10	10	20	20	20
	مقدار	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
Z	50			3		5	-4
X_2	8		1	2		0	1
X_1	6	1		-2		-1	-2
X_4	12			-3	1	3	-1

7- یک تولید کننده ، کارائی را در سه اندازه بزرگ ، متوسط و کوچک تولید می کند که سود خالص هر واحد از آنها به ترتیب 12 ، 10 و 9 دلار می باشد. این تولید کننده سه مرکز تولید دارد که این کالاها را تولید می کند و ظرفیت این مراکز به ترتیب 550 ، 750 و 275 واحد تولید در هر روز (بدون توجه به اندازه کالا) می باشد. تولید این کالاها نیاز به آب خنک کننده دارد و هر واحد از تولیدات بزرگ ، متوسط و کوچک به ترتیب 21 ، 17 و 9 گالن آب خنک کننده نیاز دارند. تقاضای روزانه برای این کالاها در بازار 700 بزرگ ، 900 متوسط و 450 کوچک می باشد. سیاست شرکت بر این است که نسبت تعداد تولید به ظرفیت مرکز تولید در همه مراکز تولید برابر باشند. چه مقدار از هر اندازه در هر مرکز تولید گردد تا سود شرکت حداکثر گردد. مدل خطی این مسئله را بنویسید ولی حل نکنید.

بهار 71

1- کارخانه ای برای تولید دو نوع محصول A و B از دو منبع b, a استفاده می کند. میزان استفاده محصول A از منابع b, a به ترتیب 2 و 3 واحد می باشد. همچنین میزان استفاده محصول B از منابع b, a به ترتیب 3 و 4 واحد است. میزان منابع موجود b, a به ترتیب 16 و 24 واحد می باشد. در حین تولید محصول B ، محصول جانبی دیگری بنام C بوجود می آید که هزینه اضافه تولیدی در بر ندارد ، اگرچه قسمتی از محصول C می تواند در بازار به فروش برسد ولی باقیمانده آن باید تخریب شود. قیمت فروش هر واحد از محصولات A و B و C در بازار به ترتیب 4، 10 و 3 دلار می باشد. همچنین هزینه تخریب هر واحد محصول C 2 دلار می باشد. پیش بینی می شود که تنها 5 واحد محصول C را می توان در بازار فروخت. همچنین به ازای تولید هر واحد محصول B ، 2 واحد محصول جانبی C به دست می آید. مسئله تعیین میزان تولید محصول A و B می باشد بطوریکه در آمد حاصله ماکزیمم شود ، این مسئله را بصورت یک برنامه خطی فرموله کنید.

2- کارخانه ای که یک نوع محصول تولید می کند می خواهد برنامه تولید چهار هفته آینده این محصول را برنامه ریزی کند ، هزینه تولید هر واحد محصول در هفته اول و دوم 10 دلار و در هفته سوم و چهارم 15 دلار می باشد. تقاضاهای موجود برای این محصول در بازاردر چهار هفته آینده به ترتیب 300 ، 700 ، 900 و 800 واحد بوده که باید بوسیله

کارخانه برآورده شود. ظرفیت تولیدی کارخانه حداکثر 700 واحد در هفته می باشد ، بعلاوه کارخانه می تواند در اثنای هفته دوم و سوم با دادن اضافه کار به کارگران کارخانه این ظرفیت رت در هر هفته به میزان 200 واحد افزایش دهد، ولی دادن اضافه کاری باعث می شود که هزینه تولید هر واحد محصول اضافی 5 دلار افزایش یابد ، همچنین هزینه انبار کردن هر واحد محصول 3 دلار در هفته می باشد ، هدف کارخانه برنامه ریزی تولید است بطوریکه کل هزینه مینیمم شود ، این مسئله را به صورت یک برنامه خطی فرموله کنید.

3- برنامه خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$Max\ Z = 4X_1 + 3X_2$$
$$s.t.\begin{cases} 2X_1 + X_2 \le 8 \\ -X_1 + X_2 \le 4 \\ 0 \le X_1 \le 3\ ,\ 0 \le X_2 \le 5 \end{cases}$$

الف-برنامه فوق را به روش سیمپلکس ب متغییرهای محدود شده حل کنید.
ب- اگر محدودیت دوم مسئله به جای $-X_1 + X_2 \le 4$ به صورت $-X_1 + X_2 \le 5$ در آید ، بدون حل مجدد مسئله و به کمک جدول بهینه قسمت "الف" میزان تابع هدف را برای مسئله فوق محاسبه کنید.
4-برنامه خطی (مینیمم) زیر را که بصورت جدول اولیه داده شده است را در نظر بگیرید:

پایه	مقدار	X_1	X_2	X_3	X_4	V_1
$-Z$	0	-1	2	0	0	0
X_3	4	1	1	1	0	0
V_1	2	-1	1	0	-1	1

که در آن V_1 متغییر مصنوعی است. بعد از حل توسط روش سیمپلکس ، تابلو نهائی زیر بدست آمده ست:

پایه	مقدار	X_1	X_2	X_3	X_4	V_1
$-Z$	-4	1	0	0	2	-2
X_3	2	2	0	1	1	-1
X_2	2	-1	1	0	-1	1

الف- دامنه تغییرات ضریب متغییر X_2 چقدر باشد که پایه بهینه تغییر نکند ، در حدود دامنه چه تغییراتی در پایه رخ می دهد.

ب- دامنه تغییرات سمت راست محدودیت دوم را به نحوی که پایه تغییر نکند را پیدا کنید ، در حدود دامنه چه تغییراتی در پایه رخ می دهد.

5- کارخانه ای برای تولید سه نوع محصول A و B و C از سه ماشین m_3, m_2, m_1 استفاده می کند ، هدف کارخانه تعیین میزان تولید هر محصول است بطوریکه در آمد حاصل از فروش محصولات ماکزیمم شود. برای تولید محصول A ، از هر سه ماشین m_3, m_2, m_1 استفاده می شود و در تولید محصول B فقط از ماشینهای m_3, m_1 استفاده می شود ، در تولید محصول C از ماشینهای m_2, m_1 استفاده می شود. قیمت فروش هر واحد محصول A و B و C در بازار به ترتیب 4 ، 2 و 5 دلار می باشد ، کارخانه مسئله فوق را بصورت زیر فرموله کرده است:

$$Max\ Z = 4X_1 + 2X_2 + 5X_3$$

$$s.t.\begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_3 \le 430 \\ X_1 + 2X_3 \le 460 \\ X_1 + 4X_2 \le 450 \\ X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{cases}$$

که در آن X_1, X_2, X_3 میزان تولید محصول A و B و C بوده و ضرائب سمت راست محدودیتها نشان دهنده ظرفیت کاری ماشینهای m_1, m_2, m_3 بر حسب دقیقه می باشد. کامپیوتر نتایج حل مسئله فوق و همچنین حدود تغییرات ضرایب تابع هدف و سمت راست را بصورت زیر ارائه داده است :

جواب بهینه : $X_1 = 0\ ,\ X_2 = 100\ ,\ X_3 = 230$

مقدار بهینه : Max Z=1350

شبه قیمت : برای محدودیت اول 1

برای محدودیت دوم 2

برای محدودیت سوم 0

هزینه تقلیل یافته : برای فعالیت X_1 -3

برای فعالیت X_2 0

برای فعالیت X_3 0

حدود تغییرات ضرائب سمت راست

حد بالائی	مقدار کنونی	حد پائینی	محدودیتها
455	430	230	1
860	460	410	2
∞	450	400	3

حدود تغییرات ضرائب تابع هدف

حد بالائی	مقدار کنونی	حد پائینی	متغیر
7	4	-∞	X_1
10	2	0	X_2
∞	5	3	X_3

با استفاده از اطلاعات فوق به سوالات زیر جواب دهید.

الف- اگر قیمت فروش هر واحد محصول C در بازار به 4 دلار کاهش یابد ، جواب بهینه و در آمد حاصله کارخانه چگونه تغییر می کند.

ب- فرض کنید که این امر ممکن است که ظرفیت تولیدی فقط یکی از ماشینهای m_2, m_1 یا m_3 را به اندازه 10 دقیقه افزایش داد ، کدام ماشین را برای این تغییر ظرفیت پیشنهای می کنید؟ توضیح دهید.

ج- اگر قیمت فروش هر واحد محصول A در بازار به 6 دلار افزایش یابد ، آیا کارخانه از محصول A تولید خواهد نمود؟ توضیح دهید.

د- فرض کنید که ظرفیت ماشین m_2 را می توان با هزینه ای برابر با 250 دلار به اندازه 200 دقیقه افزایش داد ، آیا کارخانه این کار را انجام خواهد داد؟ توضیح دهید.

6-سئولات تستی:

1- برای حل یک مسئله برنامه ریزی خطی در صورتی از روش (فاز یک – فاز دو) استفاده می شود که :

الف- مسئله پیچیده(بزرگ) باشد

ب- هیچ جواب پایه امکان پذیر اولیه ای در دسترس نباشد

ج- تابع هدف بصورت Max باشد

د- تابع هدف بصورت Min باشد

2- مسئله ای را می توان به دو صورت فرموله کرد ، هر دو مدل حاصله ، برنامه ریزی خطی و از نظر بیان مشابه هستند ، مدل اول دارای 100 متغییر و 1000 محدودیت است ، و مدل دوم دارای 1000 متغییر و 100 محدودیت است ، از نظر حجم محاسبات معمولا :

الف- مدل اول بهتر است

ب- مدل دوم بهتر است

ج- تفاوتی با هم ندارند

د-تاثیر عواملی نظیر ضرایب تابع هدف و محدودیتها بیش از تعداد متغییرها و محدودیتهاست

3- در یک برنامه ریزی خطی ، حداکثر تعداد جوابهای پایه برابر است با :

الف- تعداد محدودیتها

ب-تعداد متغییرها

ج-حاصل ضرب تعداد محدودیتها در تعداد متغییرها

د-هیچکدام

4- در یکی از مراحل حل مسئله برنامه ریزی خطی در جدول سیمپلکس ، مقادیر مربوط به ضرایب یکی از متغییرها در تمامی سطرهای مربوط به محدودیتها همگی صفر یا منفی هستند ، این رویداد نشانگر آن است که :

الف-مسئله دارای جواب نامتناهی است

ب- ناحیه امکانپذیر نا محدود است ولی ممکن است جواب بهینه محدود باشد

ج-مسئله امکان ناپذیر است د-تعداد جوابهای بهنه مسئله بی نهایت است

5- اگر A ناحیه امکانپذیر مربوط به یک برنامه ریزی ریاضی باشد ئ بیشترین مقدار تابع f بر روی A ، 7 و بیشترین مقدار تابع g بر روی A ، 5 باشد ، بیشترین مقدار تابع f+g بر روی ناحیه A:

الف-حتما بزرگتر یا مساوی 5 است

ب-حتما بزرگتر یا مساوی 7 است

ج-حتما کوچکتر یا مساوی 12 است

د-هیچکدام

6- در روش سیمپلکس ابزار تست نسبت تضمین می کند که:

الف-در جدول بعدی مقدار تابع هدف حتما بهبود یابد

ب-در جدول بعدی امکان پذیری جواب حفظ شود

ج-در جدول بعدی مقدار تابع هدف کاهش نیابد

د-هیچکدام

7- در یک مسئله برنامه ریزی خطی تابع هدف به فرم مینیمم است ، افزایش یک محدودیت به محدودیتهای این مسئله :

الف-تغییری در جواب بهینه نمی دهد

ب-جواب بهینه را کاهش نمی دهد

ج-جواب بهینه را افزایش نمی دهد

د-هیچکدام

8- در یک مرحله از روش سیمپلکس وارد کردن متغییر غیر پایه ای که ضریب آن در تابع هدف بیشترین مقدار را در میان ضرایب تابع هدف داراست به پایه ، باعث می شود که :

الف-بیشترین افزایش ممکنه در تابع هدف ایجاد می شود

ب-امکانپذیری در جدول بعدی حفظ می شود

ج-مقدار تابع هدف حتما افزایش می یابد

د-هیچکدام

77/9/30

1- مسئله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید. این مسئله را به روش M بزرگ حل کرده ایم و فرض کنید جدول زیر جدول بهینه ناقص مسئله فوق است که در آن S_1 متغیر مازاد محدودیت دوم و X_5, X_4 متغیرهای مصنوعی محدودیت های دوم و سوم است.

$$Min \quad Z = 2X_1 + 3X_2 + 5X_3$$

$$s.t.\begin{cases} 1/2\,X_1 + 1/4\,X_2 + X_3 = 4 \\ X_1 + 3X_2 \geq 20 \\ X_1 + X_2 = 10 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

جدول بهینه با حداکثر کردن تابع هدف

پایه	مقدار	X_1	X_2	X_3	S_1	X_4	X_5
Z	c	0	0	0	d	M-1.125	M+1.625
X_3	a	1			-1/8		
X_2	b		1		-1/2		
X_1	5			1	1/2		

الف- سیاست بهینه و مقدار بهینه تابع هدف را تعیین کنید.

ب- محدودیت های فعال را تعیین کنید.

ج- شبه قیمت اولین محدودیت را تعیین کنید. همچنین شبه قیمت سوم را.

د- مقدار d را تعیین کنید.

ه- ضریب X_4 در جدول بهینه را تعیین کنید.

و- دامنه تغییرات b_2, c_1 را بطوریکه پایه بهینه تغییر نکند بدست آورید.

ز- اگر فعالیت جدید X_4 دارای ضریب 12 در تابع $A.4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ در محدودیتها باشد آیا انجام این فعالیت توصیه می شود ؟

اگر بلی مقدار بهینه تابع هدف چه مقدار بهبود می یابد.

2- یک شرکت فروشنده محصولات غذائی ، مواد اولیه خود را از عمده فروشان تهیه و از مخلوط کردن آنها سه محصول تعیین می کند. قیمت فروش غذای A کیلوئی 1500 تومان ، غذای B کیلوئی 2000 تومان و غذای C 1000 تومان می باشد. سایر اطلاعات مربوطه در جدول زیر آمده است.

نوع محصول	میزان فروش در ماه به کیلو گرم	درصد پروتئین	ویتامین A(واحد در کیلوگرم)	ویتامین C(میلی گرم در کیلو)
A	1000	10	200	300
B	1500	10	1000	600
C	4000	2	300	500

چهار ماده اولیه در تولید این غذاها به کار می رود که اطلاعات آنها در جدول زیر آمده است.

ماده اولیه	هزینه هر کیلو به تومان	درصد پروتئین	ویتامین A(واحد در کیلو)	ویتامین C(میلی گرم)
مخلوط پروتئینی	350	20	100	50
پودر ویتامین A	425	0	40000	0
پودر ویتامین C	450	0	0	5000
الیاف گیاهی	25	1	20	10

این شرکت از هر ماده اولیه چه مقدار در ماه تهیه نماید تا سود خود را حداکثر نماید. مدل خطی این مسئله را بنویسید.

3- مسئله زیر را به روش سیمپلکس تجدید نظر شده حل کنید. همچنین دامنه تغییرات b_i ها و c_iها به طوری که پایه بهینه تغییر نکند بدست آورید.

$$Max \quad Z = 2X_1 - 2X_2 + 4X_3$$

$$s.t.\begin{cases} -X_1 + X_2 + X_3 \le 20 \\ 2X_1 - X_2 + X_3 \le 10 \\ X_1 + X_2 + 3X_3 \le 60 \\ X_i \ge 0 \quad , \quad i = 1,2,3 \end{cases}$$

آشنایی نرم افزار GAMS در محیط Windows

مقدمه

GAMS یک زبان برنامه نویسی مدل سازی با قابلیت بالا می باشد از GAMS برای حل مسائل برنامه ریزی خطی (LP), برنامه ریزی غیر خطی (NLP), برنامه ریزی عدد صحیح مختلط(MIP) و ... استفاده می شود.

این نرم افزار در محیط های Dos, Windows و Unix قابل اجرا می باشد.

برنامه نویسی با نرم افزارGAMS

پس از نصب این برنامه بر روی کامپیوتر با کلیک کردن بر روی آیکون ان این زبان مدل سازی باز می شود. از منوی File گزینه New را کلیک کرده تا یک صفحه باز شود و با ایجاد این صفحه, آن را درهر جایی که بخواهیم با پسوند GAMS ذخیره می نماییم.

قبل از توضیح چگونگی برنامه نویسی در GAMS نظرتان را به نکات زیر جلب می کنیم.

1. برای GMS حروف بزرگ و کوچک تفاوتی ندارد.
2. برای رفتن به خط بعدی از کلید Enter استفاده می شودو از کلید Tab در هنگام تخصیص پارامترهای دو اندیسه و بیشتر استفاده می شود.

برخی از دستورات نرم افزار GAMS

دستور Sets

این دستور برای معرفی تمام اندیس هایی که در معادلات مدل استفاده می شود؛ بکار می رود. این اندیس ها هم می تواند بصورت عددی و هم بصورت عبارتی صرف (حروف) مورد استفاده قرار گیرد.

نمونه

```
sets
i       /1,2/
j      /a,b,c/
k      /1*7/ ;
```

بخشSets فوق بیان می کند که i مقادیر 1و2, j مقادیر a,b,c و k مقادیر 1و2 و ... 7 را می پذیرد.

دستور Parameters

در GAMS این دستور پارامترهایی چون بردارهای ثابت معلوم ومقادیرشان را تعریف می کند. البته باید هر مقدار از اندیس بردار تعلق گیرد که این اندیس در بخشSets معرفی شده است.

نمونه

```
parameters
C(i)     /1 2,2 3/
B(j)     /a 1,b -2,c 4/ ;
```

دستور Table

درGAMS ماتریس ضرایب با Table تعریف می شود برای رفتن از یک درایه ماتریس به درایه دیگر در همان سطر از کلید Tabe استفاده می شود.

نمونه

```
table
a(i,j)            توضیحی برای ضرایب تکنولوژیکی(فنی)
       a     b     c
1      -4    2     0
2      3     -1    -7
;
```

در دستور Table فقط یک ماتریس می توان وارد کرد. برای وارد کردن چندین ماتریس همان تعداد Table لازم است.

دستور تعریف متغیرها Variables

در بخشVariables مجهولات مساله را تعریف می کنیم. متغیرهای نامنفی با عنوان Positive Variables و متغیرهای نامثبت Negative Variables معرفی می شوند ومتغیرهایی که تنها مقادیر صفر ویک می گیرند با Binary variables و متغیرهای عدد صحیح با Integer Variables نمایش داده می شوند.

نمونه

```
variables Z target function
positive variables
x(j)           توضیحی برای متغیرهای نامنفی
binary variables
y(i)           توضیحی برای متغیرهای باینری
;
```

دستور تعریف معادلات Equations

در این دستور, معادلات و نا معادلات نعریف می شوند بدین ترتیب که ابتدا تابع یا توابع هدف و محدودیت ها نام گذاری می شود. بعد از نام گذاری, معادلات را وارد برنامه می کنیم. بنابراین ابتدا نام معادله و سپس دو نقطه .. و بدنبال شان محدودیت به طور جبری تعریف می شود.

نمونه

```
equation
obj
constraint(i)
constraint(j) ;
```

obj..   تعریف جبری تابع هدف   ;

constraint(i)..   تعریف جبری محدودیت   ;

constraint(j)..   تعریف جبری محدودیت   ;

برای تعریف جبری تابع هدف و محدودیت ها به صورت زیر عمل می نماییم.

تعریف در GAMS	علائم ریاضی
=e=	=
=l=	$\leq$
=g=	$\geq$
Sum(j,c(j)*x(j))	$\sum_j c_j x_j$
Prod(j,c(j)*x(j))	$\prod_j c_j x_j$
Sum((i,j,k),x(i,j,k))$(ordj<>ordi)	$\sum_i \sum_j \sum_k x_{ijk} \quad , i \neq j$

در نرم افزار GAMS می توان برای متغیرها حدود پایین و بالا تعریف نمود. بدین معنی که با متغیرهای کراندار سروکار داشته باشیم که هم می توان آنها را با استفاده از توضیحات فوق نوشت و هم از دستورات زیر استفاده نمود.

x.lo('1')=2; $x_1 \geq 2$

x.up('2')=8;   ← $x_2 \leq 8$

s.up('j')=5; $s_j \leq 5$

دستور Scalar

این دستور برای تعریف مقادیر ثابت استفاده می شود.

نمونه

```
scalar
w1 /0.9/
w2 /0.1/
;
```

دستور فوق به این معنی است که W_1 مقدار ثابت 0.9 و W_2 مقدار ثابت 0.1 را بخود می گیرد.

دستور Model

در این دستور نام مدل و محدودیت ها و تابع هدفی که باید در نظر گرفته شودمی آید.

نمونه1

```
Model   OPT1 /all/;
```

این دستور نام مدل را OPT1 در نظر گرفته و تمامی معادلات و نامعادلات شامل تابع هدف و محدودیت ها رادر بر می گیرد.

نمونه2

```
Model OPT2 /obj1,constraint1,constraint3/;
```

این دستور نام مدل OPT2 در نظرگرفته و فقط معادلاتی که نام شان در بین //قرار دارد را در نظر می گیرد.

توجه داشته باشید که در یک برنامه GAMS می توان چندین مدل با تابع هدف های مختلف و محدودیت های متفاوت تعریف و حل نمود. ولی به ازای هر مدل باید یک نام و یک دستورSolve که کمی چند توضیح داده می شود؛ بکار برد.

دستور Solve

این دستور, ماکزیمم سازی و می نیمم سازی تابع هدف و نوع مدل LP بودن و یاNLP بودن و ... را مشخص می نماید.

نمونه

```
solve OPT1 using lp minimizing Z;
```

دستور فوق به کامپیوتر اعلام می کند که مدل OPT1 را با استفاده ازLP که در کتابخانه برنامه حاضر است به منظور مینیمم سازی تابع هدف Z حل نماید.

دستور Display

این دستور اختیاری بوده و در انتهای برنامه نوشته می شود تا مقادیر یک متغیر و شبه قیمت ها را به طور خلاصه نمایش دهد.

نمونه

```
display x.l,x.m ;
```

بر اساس آنچه گفته شد می توان مدل های ساخته شده را به راحتی درGAMS برنامه نویسی وحل نمود. برای اجرای برنامه می توان از کلید F_9 و یا منوی File گزینه Run استفاده نمود.

اکنون دو مساله در این قسمت مدل سازی، برنامه نویسی و حل می گردد.

مساله 1:

به منظور ساختن 10 واحد آلیاژی با ترکیب 10% سرب, 50% روی و 40% قلع از هفت نوع آلیاژ موجود در بازار با ترکیبات مختلف ارائه شده در جدول زیر استفاده می شود.

از کدامیک از آلیاژهای موجود در بازار بایستی در تولید آلیاژ جدید استفاده شود تا ضمن تهیه آلیاژ مورد نیاز, هزینه ها حداقل گردد.

اسم آلیاژ / نوع فلز	A	B	C	D	E	F	G
% سرب	30	20	40	60	10	10	50
% روی	30	30	50	30	10	30	40
% قلع	40	50	10	10	80	60	10
قیمت واحد	76	73	58	60	41	43	69

حل:

x_i : میزان استفاده از آلیاژ نوع i به واحد مربوطه در یک واحد ازآلیاژ مورد نیاز

$$
\begin{aligned}
&Min \quad Z = 76x_A + 73x_B + \ldots + 69x_G \\
&ST. \\
&\quad x_A + x_B + \ldots + x_G = 1 \\
&\quad 0.3x_A + 0.2x_B + \ldots + 0.5x_G = 0.1 \\
&\quad 0.3x_A + 0.3x_B + \ldots + 0.4x_G = 0.5 \\
&\quad 0.4x_A + 0.5x_B + \ldots + 0.1x_G = 0.4 \\
&\quad x_i \geq 0 \quad , i = A, B, \ldots, G
\end{aligned}
$$

برنامه نوشته شده در GAMS

```
sets
i  mount of use /A,B,C,D,E,F,G/
j              /1*4/
;
parameter
c(i)  /A 76,B 73,C 58,D 60,E 41,F 43,G 69/
b(j)  /1 1,2 0.1,3 0.5,4 0.4/
;
TABLE
a(j,i)
       A      B      C      D      E      F      G
1      1      1      1      1      1      1      1
2      0.3    0.2    0.4    0.6    0.1    0.1    0.5
3      0.3    0.3    0.5    0.3    0.1    0.3    0.4
4      0.4    0.5    0.1    0.1    0.8    0.6    0.1
;
variables  z  function target
positive variables
x(i);
```

```
equation
obj
constraint(j)
;
obj..z=e=sum(i, c(i)*x(i);
  constraint(j)..sum(i,a(j,i)*x(i))=e=b(j);
model opt1 /all/;
solve opt1 using lp minimizing z;
display x.l ,x.m;
```

گزارش حاصل از نرم افزار

```
GAMS Rev 143  Intel/MS Windows                    08/19/06 15:12:20 Page 1
G e n e r a l   A l g e b r a i c   M o d e l i n g   S y s t e m
C o m p i l a t i o n


sets
i  mount of use /A,B,C,D,E,F,G/
j            /1*4/
;
parameter
c(i)  /A 76,B 73,C 58,D 60,E 41,F 43,G 69/
b(j)  /1 1,2 0.1,3 0.5,4 0.4/
;
TABLE
 a(j,i)
         A      B      C      D      E      F      G
 1       1      1      1      1      1      1      1
 2       0.3    0.2    0.4    0.6    0.1    0.1    0.5
 3       0.3    0.3    0.5    0.3    0.1    0.3    0.4
 4       0.4    0.5    0.1    0.1    0.8    0.6    0.1
 ;
 variables z  function target
 positive variables
 x(i);
 equation
 obj
 constraint(j)
 ;
 obj..z=e=sum(i, c(i)*x(i));
 constraint(j)..sum(i,a(j,i)*x(i))=e=b(j);
```

```
  26  model opt1 /all/;
  27  solve opt1 using lp minimizing z;
  28  display x.l ,x.m;


COMPILATION TIME     =        0.030 SECONDS      3 Mb  WIN220-143 Jul 27, 2005

GAMS Rev 143  Intel/MS Windows                    08/19/06 15:12:20 Page 2
G e n e r a l   A l g e b r a i c   M o d e l i n g   S y s t e m
Equation Listing    SOLVE opt1 Using LP From line 27


---- obj  =E=

obj..  z - 76*x(A) - 73*x(B) - 58*x(C) - 60*x(D) - 41*x(E) - 43*x(F) - 69*x(G)
     =E= 0 ; (LHS = 0)


---- constraint  =E=

constraint(1)..  x(A) + x(B) + x(C) + x(D) + x(E) + x(F) + x(G) =E= 1 ;

     (LHS = 0, INFES = 1 ***)

constraint(2)..  0.3*x(A) + 0.2*x(B) + 0.4*x(C) + 0.6*x(D) + 0.1*x(E) + 0.1*x(F)

     + 0.5*x(G) =E= 0.1 ; (LHS = 0, INFES = 0.1 ***)

constraint(3)..  0.3*x(A) + 0.3*x(B) + 0.5*x(C) + 0.3*x(D) + 0.1*x(E) + 0.3*x(F)

     + 0.4*x(G) =E= 0.5 ; (LHS = 0, INFES = 0.5 ***)

REMAINING ENTRY SKIPPED

GAMS Rev 143  Intel/MS Windows                    08/19/06 15:12:20 Page 3
G e n e r a l   A l g e b r a i c   M o d e l i n g   S y s t e m
Column Listing      SOLVE opt1 Using LP From line 27


---- z  function target

z
                (.LO, .L, .UP = -INF, 0, +INF)
        1       obj
```

```
---- x

x(A)
            (.LO, .L, .UP = 0, 0, +INF)
    -76       obj
      1      constraint(1)
     0.3     constraint(2)
     0.3     constraint(3)
     0.4     constraint(4)

x(B)
            (.LO, .L, .UP = 0, 0, +INF)
    -73       obj
      1      constraint(1)
     0.2     constraint(2)
     0.3     constraint(3)
     0.5     constraint(4)

x(C)
            (.LO, .L, .UP = 0, 0, +INF)
    -58       obj
      1      constraint(1)
     0.4     constraint(2)
     0.5     constraint(3)
     0.1     constraint(4)

REMAINING 4 ENTRIES SKIPPED

GAMS Rev 143  Intel/MS Windows                    08/19/06 15:12:20 Page 4
G e n e r a l   A l g e b r a i c   M o d e l i n g   S y s t e m
Model Statistics    SOLVE opt1 Using LP From line 27


MODEL STATISTICS

BLOCKS OF EQUATIONS           2     SINGLE EQUATIONS           5
BLOCKS OF VARIABLES           2     SINGLE VARIABLES           8
NON ZERO ELEMENTS            36


GENERATION TIME      =        0.100 SECONDS      4 Mb  WIN220-143 Jul 27, 2005
```

EXECUTION TIME = 0.120 SECONDS 4 Mb WIN220-143 Jul 27, 2005

GAMS Rev 143 Intel/MS Windows 08/19/06 15:12:20 Page 5
G e n e r a l A l g e b r a i c M o d e l i n g S y s t e m
Solution Report SOLVE opt1 Using LP From line 27

S O L V E S U M M A R Y

MODEL opt1 OBJECTIVE z
TYPE LP DIRECTION MINIMIZE
SOLVER CPLEX FROM LINE 27

**** SOLVER STATUS 1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS 4 INFEASIBLE
**** OBJECTIVE VALUE 0.2400

RESOURCE USAGE, LIMIT 0.070 1000.000
ITERATION COUNT, LIMIT 3 10000

GAMS/Cplex Aug 1, 2005 WIN.CP.NA 22.0 029.032.041.VIS For Cplex 9.1
Cplex 9.1.2, GAMS Link 29

Dual infeasible or unbounded. Switching to primal to aid diagnosis.
Model has been proven infeasible.

	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
---- EQU obj	.	.	.	1.000

---- EQU constraint

	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
1	1.000	1.000	1.000	-0.080
2	0.100	0.220	0.100	-1.000 INFES
3	0.500	0.380	0.500	1.000 INFES
4	0.400	0.400	0.400	-0.200

	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
---- VAR z	-INF	0.240	+INF	.

```
 z  function target

---- VAR x

      LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

A     .             .       +INF      0.160
B     .             .       +INF      0.080
C     .         0.400     +INF        .
D     .             .       +INF      0.400
E     .             .       +INF      0.240
F     .         0.600     +INF        .
G     .             .       +INF      0.200


**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             2 INFEASIBLE (INFES)
                    SUM       0.240
                    MAX       0.120
                    MEAN      0.120
                             0  UNBOUNDED
GAMS Rev 143  Intel/MS Windows                    08/19/06 15:12:20 Page 6
G e n e r a l   A l g e b r a i c   M o d e l i n g   S y s t e m
E x e c u t i o n


----     28 VARIABLE x.L

C 0.400,    F 0.600


----     28 VARIABLE x.M

A 0.160,    B 0.080,    D 0.400,    E 0.240,    G 0.200



EXECUTION TIME       =        0.010 SECONDS      3 Mb  WIN220-143 Jul 27, 2005


USER: GAMS Development Corporation, Washington, DC   G871201/0000CA-ANY
      Free Demo,  202-342-0180,  sales@gams.com,  www.gams.com   DC0000
```

مساله2:

مدیر تولید یک کارخانه درصدد برنامه ریزی برای چهار ماه آینده می باشد. ظرفیت تولید ماهانه در ساعات عادی کارخانه با توجه به سوابق گذشته 2000 واحد است. همچنین ظرفیت تولید در ساعت اضافه کاری در طول ماه 500 واحد می باشد. فرض کنید که موجودی در ابتدای دوره صفر باشد.

هزینه تولید هر واحد محصول در ساعات عادی و اضافه کاری به ترتیب معادل 10 و15 تومان است. میزان محصول مورد نیاز جهت پاسخگویی به قراردادهای فروش بسته شده به شرح ذیل است.

ماه	محصول مورد تقاضا
1	1800
2	2100
3	2400
4	3000

هزینه نگهداری هر واحد محصول موجود در انبار در آخر هر ماه 2 تومان می باشد . مدیریت می خواهد پایان ماه چهارم, موجودی او به صفر برسد. برنامه تولید ماهانه این کارخانه را به گونه ای تعیین کنید که کل هزینه حداقل گردد.

حل:

x_i: تعداد تولید در ساعات عادی در ماه i ام

y_i : تعداد تولید در ساعات اضافه کاری در ماه i ام

s_i: تعداد کالای موجود در ابتدای ماه i ام

$$
\begin{aligned}
&Min \quad Z = 10\sum_{i=1}^{4} x_i + 15\sum_{i=1}^{4} y_i + 2\sum_{i=2}^{4} s_i \\
&ST. \\
&\qquad x_i \le 2000 \qquad \forall i \\
&\qquad y_i \le 500 \qquad \forall i \\
&\qquad s_{i+1} = x_i + y_i + s_i - D_i \qquad \forall i \\
&\qquad x_i \ge 0\,, y_i \ge 0 \,, s_i \ge 0 \qquad \forall i, \\
&\qquad s_1 = 0
\end{aligned}
$$

برنامه نوشته شده در GAMS

```
sets
i /1*4/
;
parameters
```

```
D(i) /1 1800,2 2100,3 2400,4 3000/
;
variables  z function target
positive variables
x(i)
y(i)
s(i);
equation
obj
constraintA(i)
constraintE(i)
constraint(i)
;
obj..z=e= 10*sum(i,x(i))+15*sum(i,y(i))+2*sum(i,s(i));
constraintA(i)..x(i)=l=2000;
constraintE(i)..y(i)=l=500;
constraint(i)..s(i+1)=e=x(i)+y(i)+s(i)-D(i);
s.up('1')=0;
model opt2 /all/;
solve opt2 using lp minimizing z;
```

گزارش حاصل از نرم افزار

```
GAMS Rev 143  Intel/MS Windows                    08/19/06 20:25:27 Page 1
G e n e r a l   A l g e b r a i c   M o d e l i n g   S y s t e m
C o m p i l a t i o n


sets
i /1*4/
;
parameters
D(i) /1 1800,2 2100,3 2400,4 3000/
;
variables  z function target
positive variables
x(i)
y(i)
s(i);
equation
obj
constraintA(i)
constraintE(i)
```

```
16  constraint(i)
17  ;
18  obj..z=e= 10*sum(i,x(i))+15*sum(i,y(i))+2*sum(i,s(i));
19  constraintA(i)..x(i)=l=2000;
20  constraintE(i)..y(i)=l=500;
21  constraint(i)..s(i+1)=e=x(i)+y(i)+s(i)-D(i);
22  s.up('1')=0;
23  model opt2 /all/;
24  solve opt2 using lp minimizing z;
```

```
COMPILATION TIME     =       0.040 SECONDS      3 Mb  WIN220-143 Jul 27, 2005

GAMS Rev 143  Intel/MS Windows                    08/19/06 20:25:27 Page 2
G e n e r a l   A l g e b r a i c   M o d e l i n g   S y s t e m
Equation Listing    SOLVE opt2 Using LP From line 24


---- obj  =E=

obj..  z - 10*x(1) - 10*x(2) - 10*x(3) - 10*x(4) - 15*y(1) - 15*y(2) - 15*y(3)

     - 15*y(4) - 2*s(1) - 2*s(2) - 2*s(3) - 2*s(4) =E= 0 ; (LHS = 0)


---- constraintA  =L=

constraintA(1)..  x(1) =L= 2000 ; (LHS = 0)

constraintA(2)..  x(2) =L= 2000 ; (LHS = 0)

constraintA(3)..  x(3) =L= 2000 ; (LHS = 0)

REMAINING ENTRY SKIPPED


---- constraintE  =L=

constraintE(1)..  y(1) =L= 500 ; (LHS = 0)

constraintE(2)..  y(2) =L= 500 ; (LHS = 0)

constraintE(3)..  y(3) =L= 500 ; (LHS = 0)
```

```
REMAINING ENTRY SKIPPED


---- constraint  =E=

constraint(1)..  - x(1) - y(1) - s(1) + s(2) =E= -1800 ;

     (LHS = 0, INFES = 1800 ***)

constraint(2)..  - x(2) - y(2) - s(2) + s(3) =E= -2100 ;

     (LHS = 0, INFES = 2100 ***)

constraint(3)..  - x(3) - y(3) - s(3) + s(4) =E= -2400 ;

     (LHS = 0, INFES = 2400 ***)

REMAINING ENTRY SKIPPED


GAMS Rev 143  Intel/MS Windows                    08/19/06 20:25:27 Page 3
G e n e r a l   A l g e b r a i c   M o d e l i n g   S y s t e m
Column Listing      SOLVE opt2 Using LP From line 24


---- z  function target

z
             (.LO, .L, .UP = -INF, 0, +INF)
        1       obj


---- x

x(1)
             (.LO, .L, .UP = 0, 0, +INF)
      -10      obj
        1      constraintA(1)
       -1      constraint(1)

x(2)
             (.LO, .L, .UP = 0, 0, +INF)
      -10      obj
        1      constraintA(2)
```

```
      -1      constraint(2)

x(3)
            (.LO, .L, .UP = 0, 0, +INF)
     -10       obj
       1      constraintA(3)
      -1      constraint(3)

REMAINING ENTRY SKIPPED

---- y

y(1)
            (.LO, .L, .UP = 0, 0, +INF)
     -15       obj
       1      constraintE(1)
      -1      constraint(1)

y(2)
            (.LO, .L, .UP = 0, 0, +INF)
     -15       obj
       1      constraintE(2)
      -1      constraint(2)

y(3)
            (.LO, .L, .UP = 0, 0, +INF)
     -15       obj
       1      constraintE(3)
      -1      constraint(3)

REMAINING ENTRY SKIPPED

---- s

s(1)
            (.LO, .L, .UP = 0, 0, 0)
      -2      obj
      -1      constraint(1)

s(2)
            (.LO, .L, .UP = 0, 0, +INF)
      -2      obj
       1      constraint(1)
      -1      constraint(2)
```

```
s(3)
          (.LO, .L, .UP = 0, 0, +INF)
     -2       obj
      1       constraint(2)
     -1       constraint(3)

REMAINING ENTRY SKIPPED

GAMS Rev 143  Intel/MS Windows                    08/19/06 20:25:27 Page 4
G e n e r a l   A l g e b r a i c   M o d e l i n g   S y s t e m
Model Statistics    SOLVE opt2 Using LP From line 24


MODEL STATISTICS

BLOCKS OF EQUATIONS           4     SINGLE EQUATIONS          13
BLOCKS OF VARIABLES           4     SINGLE VARIABLES          13
NON ZERO ELEMENTS            36


GENERATION TIME      =       0.060 SECONDS      4 Mb  WIN220-143 Jul 27, 2005


EXECUTION TIME       =       0.070 SECONDS      4 Mb  WIN220-143 Jul 27, 2005

GAMS Rev 143  Intel/MS Windows                    08/19/06 20:25:27 Page 5
G e n e r a l   A l g e b r a i c   M o d e l i n g   S y s t e m
Solution Report     SOLVE opt2 Using LP From line 24


          S O L V E      S U M M A R Y

   MODEL   opt2              OBJECTIVE  z
   TYPE    LP              DIRECTION  MINIMIZE
   SOLVER  CPLEX              FROM LINE  24

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      1 OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE         101700.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.070      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT         2         10000
```

```
GAMS/Cplex    Aug  1, 2005 WIN.CP.NA 22.0 029.032.041.VIS For Cplex 9.1
Cplex 9.1.2, GAMS Link 29

Optimal solution found.
Objective :      101700.000000
                     LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU obj             .         .         .        1.000

---- EQU constraintA

     LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

1     -INF   2000.000  2000.000    -3.000
2     -INF   2000.000  2000.000    -5.000
3     -INF   2000.000  2000.000    -7.000
4     -INF   2000.000  2000.000    -9.000

---- EQU constraintE

     LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

1     -INF       .      500.000      .
2     -INF    300.000   500.000      .
3     -INF    500.000   500.000    -2.000
4     -INF    500.000   500.000    -4.000

---- EQU constraint

     LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

1 -1800.000 -1800.000 -1800.000   -13.000
2 -2100.000 -2100.000 -2100.000   -15.000
3 -2400.000 -2400.000 -2400.000   -17.000
4 -3000.000 -3000.000 -3000.000   -19.000

                     LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR z          -INF     1.0170E+5     +INF       .

  z  function target

---- VAR x
```

	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
1	.	2000.000	+INF	.
2	.	2000.000	+INF	.
3	.	2000.000	+INF	.
4	.	2000.000	+INF	.

---- VAR y

	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
1	.	.	+INF	2.000
2	.	300.000	+INF	.
3	.	500.000	+INF	.
4	.	500.000	+INF	.

---- VAR s

	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
1	.	.	.	-11.000
2	.	200.000	+INF	.
3	.	400.000	+INF	.
4	.	500.000	+INF	.

```
**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             0 INFEASIBLE
                             0  UNBOUNDED


EXECUTION TIME       =        0.000 SECONDS      2 Mb  WIN220-143 Jul 27, 2005


USER: GAMS Development Corporation, Washington, DC   G871201/0000CA-ANY
      Free Demo,  202-342-0180,  sales@gams.com,  www.gams.com   DC0000
```

از نرم افزار GAMS می توان در آنالیز ریسک و برنامه ریزی تصادفی نیز استفاده نمود که برای این کار دستورات For, Loop, While, If و... وجود دارد.

نحوه و نوع کاربرد دستورات حلقه های تکرار و شرطی

حلقهLoop روی اندیس می چرخد در حالی که حلقه های While,For روی اسکالر می چرخد.

نمونه ها

```
loop( condition,
    statements
    ) ;
```

```
loop( i,
    b(i)=uniform(0,10)
    ) ;
```

دستور فوق برای پارامتر b به تعداد اندیس i اعداد تصادفی بین 0و 10 تولید می کند.

```
for(i=1 to 10 3,
     statements
       );
```

دستور فوق روی اسکالر i می چرخد به طوری که سه تا سه تا افزایش می یابد.

```
while( conditin,
statements
);
```

و اینک دستور شرطی If

```
if(condition,
statements
else
statements
```

);

اکنون چنانچه نیاز به دستوراتی غیر دستورات فوق داشته اید می توانید از منوی Help گزینه GAMS User Guide به نحوه و کاربرد انواع دستورات دست پیدا کنید. از سوی دیگر با مراجعه به منوی File گزینه Model library و سپس Open GAMS Model library با انواع برنامه های نوشته شده آشنا شوید. به عنوان نمونه برای نوشتن پارامترهای بیش از سه اندیس می توانید به برنامه Financial Optimization: Risk Management برنامه با Seq Nr 111 رجوع کنید.

منابع:

1- برادلی، 1 و هکس، و مگننتی، ت. ًبرنامه ریزی ریاضی کاربردیً. ترجمه ذکائی آشتیانی، هـ اصفهان: دانشگاه صنعتی افهان، 1363 و .1365

2- بازرگان، م ب، آشنایی با تحقیق در عملیات – برنامه ریزی خطی، پویا، و با اعداد صحیح، ویرایش دوم، مرکز نشر دانشگاهی، .1370

3- مدرس، م و آصف وزیری، 1،ًبرنامه ریزی خطیً، ویرایش چهارم، نشر تندر، 1370.

Apostol T. M. (1975). Mathematical Analysis, Second Edition, Addison Wesley Publishing Company, Reading Massachusetts, pp. 127-133.

Bradley, S., Hax, A. & Magnanti, T. (1977), Applied Mathematical Programming, Addison Wesley, Reading, MA.

Ford, L. & Fulkerson, D. (1962), Flows in Networks, Princeton University Press, Princeton, NJ.

Gill, P., Murray, W. & Wright, M. (1991), Numerical Linear Algebra and Optimization, Vol. 1, Addison-Wesley, Redwood City, CA.

Luenberger, D. (1984), Introduction to Linear and Nonlinear Programming, Addison-Wesley, Reading MA.

Nash, S. & Sofer, A. (1996), Linear and Nonlinear Programming, McGraw-Hill, New York.

Nemhauser, G. & Wolsey, L. (1988), Integer and Combinatorial Optimization, Wiley, New York.