بسمه تعالی

دانشکده مهندسی صنایع و مرکز برنامه ریزی سیستمها

دانشگاه صنعتی اصفهان

جزوه تحقیق درعملیات II

(شماره درس ۱۳۱۰۳۱۴)

محمد سعید صباغ

بهمن ماه ۱۳۹۲

13-10-314

مقدمه

هر مسأله نیازمند تصمیم‌گیری را می‌توان به عنوان یکی از انواع مسأله‌های تحقیق در عملیات مطرح کرد. امروزه روش‌های متعددی برای تصمیم‌گیری وجود دارد، ولی از آنجاییکه تصمیم‌گیری سریع و صحیح می‌تواند مدیران را در اتخاذ راهکارهایی مناسب برای حل مشکلاتشان یاری نماید، شاخه‌های گوناگونی در تحقیق در عملیات به وجود آمده است، که می‌توان از آن جمله به برنامه‌ریزی خطی با متغیرهای گسسته (با نام‌های متداول برنامه‌ریزی خطی شمار یا برنامه‌ریزی خطی با متغیرهای اعداد صحیح)، برنامه‌ریزی پویا و نظریه صف اشاره کرد.

در این جزوه ابتدا برخی از مفاهیم پایه را مرور می‌کنیم. سپس به روش‌های فرموله کردن مسأله‌های برنامه‌ریزی خطی با متغیرهای اعداد صحیح و روش‌های کلاسیک حل آن و در ادامه به روش برنامه‌ریزی پویا در حل برخی مسأله‌های برنامه‌ریزی می‌پردازیم و در نهایت با مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی آشنا میشویم..

تشکر و قدردانی

از زحمات فراوان سرکار خانم مهندس سلاله نقاش زاده یزدی که مسئولیت آماده‌سازی رایانه‌ای متن اولیه را به عهده گرفتند، آقای مهندس عمار کلانکی که بهبودهای فراوانی را پیشنهاد و پیاده کردند و سایر دانشجویانی که پیشنهادات مفیدی را ارائه نموده‌اند، بدینوسیله قدردانی می‌گردد.

فهرست

مقدمه ..... ت

تشکر و قدردانی ..... ث

فهرست ۵

فصل اول - مرور مفاهیم پایه ۷

۱-۱- انواع جواب بهینه ۷

۱-۲- مجموعه محدب ۷

۱-۳- تابع محدب و تابع مقعر ۸

۱-۴- مسأله محدب ۹

۱-۵- سیمپلکس تجدید نظر شده ۹

۱-۵-۱- گام‌های روش سیمپلکس تجدید نظرشده ۱۰

فصل دوم - برنامه‌ریزی شمار ۱۷

۲-۱- مقدمه ۱۷

۲-۲- مدل‌هایی با متغیرهای صحیح ۱۷

۲-۲-۱- مسأله بودجه‌بندی سرمایه ۱۸

۲-۲-۲- مساله کوله‌پشتی ۱۹

۲-۲-۳- مسأله تعیین محل انبارها ۲۰

۲-۲-۴- مسأله زمان‌بندی ۲۱

۲-۲-۵- مسأله تخصیص ۲۲

۲-۲-۶- مسأله فروشنده دوره‌گرد یا سیار ۲۳

۲-۳- فرموله کردن برخی محدودیت‌های مورد نیاز در یک مسأله مدل‌سازی ۲۶

۲-۳-۱- پروژه‌های پیش‌نیازی ۲۶

۲-۳-۲- پروژه‌های ناسازگار ۲۶

۲-۳-۳- امکان‌پذیری محدودیت ۲۶

۲-۳-۴- محدودیت‌های جایگزین ۲۷

۲-۳-۵- محدودیت‌های شرطی ۲۸

۲-۳-۶- هزینه‌های ثابت ۲۹

۲-۳-۷- صرفه‌جویی به مقیاس ۳۰

۲-۳-۸- توابع یک متغیره غیر خطی پاره خطی ۳۱

۲-۳-۹- عدم صرفه‌جویی به مقیاس ۳۵
۲-۳-۱۰- تقریب خطی مدل غیرخطی ۳۶
۲-۴- روش‌های حل مدل‌های دارای متغیرهای صحیح ۳۸
۲-۴-۱- روش مجارستانی برای حل مسأله تخصیص ۳۸
۲-۴-۲- روش شاخه و کرانه ۴۳
۲-۴-۳- صفحات برش ۵۱
۲-۴-۳-۱- روش برش کسری گموری ۵۱
۲-۴-۳-۲- روش برش تمام صحیح همزاد ۵۳
۲-۴-۳-۳- روش برش تمام صحیح اولیه ۵۴
۲-۴-۳-۴- برش مسأله‌های مختلط ۵۶
۲-۴-۴- روش شمارشی ۵۸
۲-۴-۴-۱- ترتیب لغتنامه‌ای ۵۸
۲-۴-۴-۲- روش شمارش کامل ۵۹
۲-۴-۴-۳- روش شمارش جزیی یا ضمنی ۵۹
فصل سوم - برنامه‌ریزی پویا ۷۲
۳-۱- مقدمه ۷۲
۳-۲- اصل بهینگی ۷۲
۳-۳- ویژگی‌های اصلی برنامه‌ریزی پویا ۷۲
۳-۴- حرکت پسرو و پیشرو و مرحله و حالت ۷۳
۳-۵- رابطه بازگشتی برای حرکت پسرو ۷۸
۳-۶- رابطه بازگشتی برای حرکت پیشرو ۷۹
۳-۷- دو مثال با دو نوع حرکت ۸۱
۳-۸- تنزیل ۹۰
۳-۹- شبکه‌ها ۹۲
۳-۹-۱- شبکه‌های بدون حلقه ۹۲
۳-۹-۲- شبکه‌های دارای حلقه ۹۲
۳-۱۰- مسأله‌های احتمالی ۹۸
۳-۱۱- مسائل ۱۰۱

منابع ۱۰۷

فصل اول - مرور مفاهیم پایه

۱-۱- انواع جواب بهینه

- **جواب بهینه محلی**:[۱] نقطه x را یک جواب بهینه محلی یک مسأله بهینه‌سازی نامیم؛ اگر x یک نقطه قابل قبول باشد (در تمام محدودیت‌های مسأله صدق کند) و در یک همسایگی x، جوابی بهتر از x وجود نداشته باشد.
- **جواب بهینه محلی اکید**:[۲] نقطه x را یک جواب بهینه محلی اکید یک مسأله بهینه‌سازی نامیم؛ اگر x یک نقطه قابل قبول (شدنی) باشد و در یک همسایگی آن، نقطه x تنها جواب بهینه باشد یا به عبارت دیگر x یگانه جواب بهینه محلی باشد.
- **جواب بهینه جهانی، سراسری، یا عمومی**:[۳] نقطه x را یک جواب بهینه جهانی یک مسأله بهینه‌سازی نامیم؛ اگر x یک نقطه شدنی باشد و در فضای قابل قبول آن مسأله، جوابی بهتر از x وجود نداشته باشد.
- **جواب بهینه جهانی اکید**:[۴] نقطه x را یک جواب بهینه جهانی اکید یک مسأله بهینه‌سازی نامیم؛ اگر x یک نقطه قابل قبول (شدنی) باشد و در فضای قابل قبول آن مسأله، نقطه x تنها جواب بهینه باشد. به عبارت دیگر باید x یگانه جواب بهینه جهانی باشد.

۱-۲- مجموعه محدب

تعریف هندسی: مجموعه‌ای محدب است که اگر هر دو نقطه از آن را به هم وصل کنیم تمام نقاط پاره‌خط حاصل متعلق به آن مجموعه باشد.

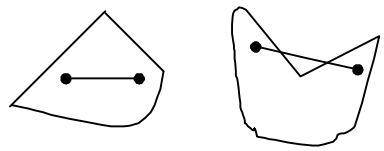
تعریف جبری: S یک مجموعه محدب است اگر:

$$(\forall x', x'' \in S\ ,\ \forall a\ : 0 \le a\ \le 1) \Rightarrow a\,x' + (1-a\,)x'' = \bar{x} \in S$$

به عنوان مثال از دو مجموعه زیر مجموعه سمت چپ یک مجموعه محدب و دیگری یک مجموعه غیر محدب می‌باشد.

---

[۱] Local Optimum Solution
[۲] Strict Local Optimum Solution
[۳] Global Optimum Solution
[۴] Strict Global Optimum Solution



نکته: اگر $s_1, s_2, \ldots, s_m$ مجموعه‌های محدب باشند، اشتراک همه آنها $(S = s_1 \cap \ldots \cap s_m)$ نیز یک مجموعه محدب خواهد بود.

۱-۳- تابع محدب و تابع مقعر

تعریف تابع محدب: تابع محدب همواره برروی یک مجموعه محدب تعریف می‌شود. بنابراین تابع f بر روی مجموعه محدب S یک تابع محدب است؛ اگر هر دو نقطه دلخواه x' و x'' متعلق به S را در نظر بگیریم داشته باشیم:

$$(\forall x', x'' \in S\ ,\ \forall a : 0 \le a \le 1) \Rightarrow$$
$$f(a x' + (1-a) x'') \le a\, f(x') + (1-a)\, f(x'')$$

ترکیب خطی فوق یک ترکیب محدب نامیده می‌شود. مفهوم رابطه فوق این است که اگر دو نقطه دلخواه بر روی آن تابع را با یک پاره خط به هم وصل کنیم، تمام نقاط پاره‌خط باید روی منحنی یا بالای منحنی آن تابع قرار بگیرد.

تعریف تابع مقعر: تابع مقعر تابعی است که منفی آن محدب باشد، یا به عبارت دیگر تابع h مقعر است؛ اگر برای هر دو نقطه دلخواه مربوط به مجموعه محدب مورد نظر داشته باشیم:

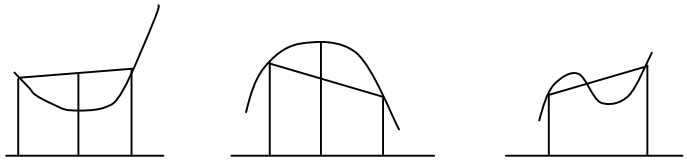
$$(\forall x_1, x_2 \in S', \forall a : 0 \le a \le 1) \Rightarrow$$
$$h(a x_1 + (1-a) x_2) \ge a\, h(x_1) + (1-a)\, h(x_2)$$

نکته ۱: تابع f مقعر است اگر و تنها اگر $-f$ محدب باشد.

نکته ۲: تابع خطی هم محدب است و هم مقعر، زیرا طبق تعریف اگر $t(x)$ خطی باشد داریم:

$$\forall a : 0 \le a \le 1 \Rightarrow$$
$$t(a x_1 + (1-a) x_2) = a\, t(x_1) + (1-a)\, t(x_2)$$

نکته ۳: اگر f یک تابع محدب بر روی مجموعه محدب S باشد، آنگاه برای هر $a \ge 0$، $a f$ نیز یک تابع محدب است. برای مثال چون $f(x) = x^2$ یک تابع محدب است، $g(x) = 5x^2$ نیز یک تابع محدب است.



مقعر　　محدب　　نه محدب و نه مقعر

۱-۴- مسأله محدب

هنگامیکه f یک تابع محدب و S یک مجموعه محدب باشد، مسأله بهینه‌سازی زیر یک مسأله محدب نامیده می‌شود:

$$\begin{aligned} &\min \quad f(x) \\ &\text{s.t.} \quad x \in S = \{ x \mid x \geq 0, g_i(x) \leq b_i, i = 1, \mathbf{L}, m \} \end{aligned}$$

نکته ۱: اگر بدانیم یک مسأله محدب است، هر جواب بهینه محلی آن یک جواب بهینه جهانی نیز می‌باشد. این خاصیت در مسأله‌های غیرخطی بسیار مهم است.

نکته ۲: اگر یک تابع مقعر را روی یک مجموعه محدب حداکثر کنیم، آن مسأله نیز یک مسأله محدب است.

نکته ۳: هر تابع هدف خطی که بر روی یک مجموعه محدب تعریف شده باشد، یک مسأله محدب است لذا هر جواب محلی یک جواب عمومی نیز می‌باشد.

تمرین:

۱- ثابت کنید که اگر f_1 و f_2 دو تابع محدب باشند، آنگاه مجموع آنها نیز یک تابع محدب است.

۲- ثابت کنید که مسأله زیر یک مسأله محدب است.

$$\begin{aligned} &\min \quad z = cx \\ &\text{s.t.} \begin{cases} A'x \leq b' \\ A''x = b'' \\ A'''x \geq b''' \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

۱-۵- سیمپلکس تجدید نظر شده

یکی از روش‌های کارا برای حل مسأله‌های برنامه‌ریزی خطی روش سیمپلکس تجدید نظر شده است. این روش با استفاده از کلیه اصول و گام‌های سیمپلکس، بدون انجام عملیات زائد مسأله را حل می‌کند.

$$\max \ z = cx$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases}$$
$$x = [x_1, x_2, \mathbf{K}, x_n]^T$$
$$c = [c_1, c_2, \mathbf{K}, c_n]$$
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{L} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{L} & a_{2n} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathbf{O} & \mathrm{M} \\ a_{m1} & a_{m2} & \mathbf{L} & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \mathbf{L} & a_n \end{bmatrix}$$
$$b = [b_1, b_2, \mathbf{K}, b_m]^T$$

در صورت اضافه شدن متغیرهای کمکی، مسأله به صورت زیر در می‌آید:

$$\max \ z = cx$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} Ax + Is = b \\ x \ge 0 \end{cases}$$
$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{L} & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{L} & 0 \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathbf{O} & \mathrm{M} \\ 0 & 0 & \mathbf{L} & 1 \end{bmatrix} \qquad s = [s_1, s_2, \ldots, s_m]^T$$

می‌دانیم که در روش سیمپلکس تعداد متغیرهای اساسی مساوی با تعداد محدودیت‌های مستقل می‌باشد. ماتریس $[AI]$ که از ضرایب کلیه متغیرها در محدودیت‌ها تشکیل شده، ماتریسی $m(m+n)$ است. این ماتریس به دو ماتریس ضرایب متغیرهای اساسی و غیر اساسی قابل تقسیم است. ماتریس ضرایب متغیرهای اساسی با B و ماتریس متغیرهای غیر اساسی با N نمایش داده می‌شود. به همین ترتیب تمام متغیرهای مسأله نیز به دو گروه متغیرهای اساسی (X_B) ومتغیرهای غیراساسی (X_N) قابل تقسیم است.

۱-۵-۱- گام‌های روش سیمپلکس تجدید نظرشده

گام ۱: تعیین وجود شرط بهینگی:

در هر تکرار ضرایب متغیرهای غیراساسی در تابع هدف را با استفاده از روابط $Y = C_B B^{-1}$ و $\overline{C} = -C + YA$ پیدا کنید. اگر این مقادیر همگی غیر منفی باشند، به جواب بهینه رسیده‌اید و جواب بهینه با استفاده از روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$z = C_B B^{-1} b = Yb$$
$$\mathrm{X_B} = B^{-1} b$$

در غیر این صورت متغیری را که دارای کوچکترین ضریب منفی است انتخاب کنید. این متغیر متغیر ورودی به پایه است.

گام ۲: تعیین متغیر خروجی:

انتخاب متغیر خروجی مستلزم در اختیار داشتن ضرایب متغیر ورودی در محدودیت‌ها است. در صورتی که متغیر x_j ورودی باشد ضرایب فعلی آن را با $\bar{a}_j$ نشان داده شده و به وسیله رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{a}_j = B^{-1} a_j$$

مقدار متغیرهای اساسی فعلی (اعداد سمت راست محدودیت‌ها) را از رابطه زیر برای ضرایب مثبت ستون لولا به دست می‌آوریم.

$$X_B = B^{-1} b = \bar{b}$$
$$\frac{\bar{b}_k}{\bar{a}_{kj}} = \min_i \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} \middle| \bar{a}_{ij} > 0 \,,\ i = 1, \ldots, m \right\}$$

آنگاه محدودیت k ام سطر لولا خواهد بود که متغیر پایه آن از پایه خارج می‌گردد. همچنین $\bar{a}_{kj}$ عنصر چرخش لولایی (عدد لولا) می‌باشد.

گام ۳: تعیین B^{-1} جدید:

متغیرهای اساسی جدید را معین کرده و B^{-1} جدید را از رابطه زیر به دست آورید و به گام اول بازگردید.

$$B^{-1}{}_{\mathrm{NEW}} = UB^{-1}{}_{\mathrm{OLD}}$$

برای به دست آوردن U یک ماتریس همانی (واحد) I را انتخاب و به جای ستون kام آن بردار زیر را جایگزین می‌نماییم.

$$m = \frac{1}{\bar{a}_{kj}} \begin{bmatrix} -\bar{a}_{1j} \\ -\bar{a}_{2j} \\ \vdots \\ -\bar{a}_{k-1,j} \\ 1 \\ -\bar{a}_{k+1,j} \\ \vdots \\ -\bar{a}_{m,j} \end{bmatrix}$$

جدول اولیه:

پایه	مقدار	X	S
Z	0	$-c$	0
S	b	A	I

بعد از k بار تکرار عملیات چرخش لولایی $k = 0,1,2,\mathbf{K}$ داریم:

پایه	مقدار	X	S
Z	$C_B B^{-1} b$	$-c + yA$	y
X_B	$B^{-1} b$	$B^{-1} A$	B^{-1}

مثال:

$$\max \quad z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

$$s.t. \begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + x_3 \le 48 \\ 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \le 20 \\ 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \le 8 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,3 \end{cases}$$

$$b = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 1.5 \\ 2 & 1.5 & .5 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 60 & 30 & 20 \end{bmatrix}$$

$$B = I = B^{-1}, \quad X_B = S, \quad C_B = 0, \quad Y = 0$$

$$\bar{C} = (-60, -30, -20)$$

گام‌های ۱و۲:

$$x_1 \to \min\left\{\frac{48}{8}, \frac{20}{4}, \frac{8}{2}\right\} = 4 \to s_3$$ خروجی ورودی به پایه

بنابراین عنصر چرخش لولایی عبارتست از:

$$\bar{a}_{31} = 2$$

$$X_B = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & x_1 \end{pmatrix}^T$$

$$B^{-1}{}_{New} = UB^{-1}{}_{Old} = UI = U$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$X_B = (s_1, s_2, x_1) \to \quad y_1 = 0 \quad y_2 = 0 \quad \bar{c}_1 = 0$$
$$y_3 = ? \quad \bar{c}_2 = ? \quad \bar{c}_3 = ?$$

$$Y = C_B B^{-1} \Rightarrow y_3 = c_B (B^{-1})_{03}$$
$$\Rightarrow y_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 30$$

$$\bar{C} = -C + yA \rightarrow$$

$$\bar{c}_2 = -c_2 + yA_{02}$$

$$= -30 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} = 15$$

$$\bar{c}_3 = -c_3 + yA_{.3}$$

$$= -20 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = -5 \leq 0$$

چون ضریب x_3 منفی می‌باشد، پس جدول بهینه نمی‌باشد و x_3 ورودی به پایه می‌باشد. خروجی را نیز با تست نسبت مشخص می‌کنیم:

$$B^{-1}A_{.3} = \bar{A}_{.3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \\ .25 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1}b \Rightarrow \bar{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} = 4, \quad \bar{b}3 = 4$$

$\min\left\{ 4/0.5 , 4/0.25 \right\} = 8 \rightarrow$ خروجی s_2 و ورودی به پایه x_3

و عنصر چرخش لولایی عبارتست از:

$$\bar{a}_{23} = 0.5$$
$$X_B = (s_1, x_3, x_1)$$

بردار m را جایگزین ستون دوم I می‌کنیم:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & -1/2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -4\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -8\\ 0 & 2 & -4\\ 0 & -1/2 & 3/2\end{bmatrix}$$

$$\bar{c}_1=0 \qquad \bar{c}_2=? \qquad \bar{c}_3=0$$
$$y_1=0 \qquad y_2=? \qquad y_3=?$$

$$Y=C_B B^{-1}\Rightarrow y_2=C_B\left(B^{-1}\right)_{.2}\Rightarrow$$

$$y_2=\begin{bmatrix}0 & 20 & 60\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 2\\ -0.5\end{bmatrix}=10$$

$$y_3=C_B\left(B^{-1}\right)_{.3}\Rightarrow$$

$$y_3=\begin{bmatrix}0 & 20 & 60\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-8\\ -4\\ 1.5\end{bmatrix}=10$$

$$\bar{C}=-C+YA\Rightarrow$$

$$\bar{c}_2=-c_2+YA_{02}=-30+\begin{bmatrix}0 & 10 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ 2\\ 1.5\end{bmatrix}=5$$

چون تمام متغیرهای غیرپایه مثبت شدند، این جواب بهینه می‌باشد:

$$z^*=Yb=\begin{pmatrix}0 & 10 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}48\\ 20\\ 8\end{pmatrix}=280$$

$$X_B^*=B^{-1}b=\begin{pmatrix}1 & 2 & -8\\ 0 & 2 & -4\\ 0 & -1/2 & 3/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}48\\ 20\\ 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24\\ 8\\ 2\end{pmatrix}$$

جدول بهینه مثال فوق به شکل زیر می‌باشد.

پایه	مقدار	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
z	280	0	5	0	0	10	10
s_1	24	0	–2	0	1	2	–8
x_3	8	0	–2	1	0	2	–4
x_1	2	1	1.25	0	0	–0.5	1.5

با دامنه تغیرات پارامترهای:

$$56 \le c_1 \le 80, \quad c_2 \le 35, \quad 15 \le c_3 \le 22.5$$
$$24 \le b_1, \qquad 16 \le b_2 \le 24, \quad 20/3 \le b_3 \le 10$$

تمرین:

مسئله زیر را با روش سیمپلکس تجدید نظر شده حل کنید:

$$\max \quad Z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 10 \\ 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 \le 15 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

فصل دوم - برنامه‌ریزی شمار

۲-۱- مقدمه

مدل‌های برنامه‌ریزی خطی که در درس تحقیق در عملیات ۱ مورد بررسی قرار گرفتند، همگی پیوسته بودند؛ بدین معنی که متغیرهای تصمیم‌گیری می‌توانستند اعداد کسری به خود بگیرند. به عنوان مثال به سادگی امکان دارد ۱۰۲/۷۵ گالن از محصول قابل تقسیمی مثل مایعات را تولید کرد. اما در مواقعی جواب‌های کسری واقع بینانه نیستند و باید متغیرهای تصمیم‌گیری عدد صحیح به خود بگیرند.

به عنوان مثال مسأله زیر را در نظر بگیرید:

$$\max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i = 1, \mathbf{K}, m) \\ x_j \geq 0 & (i = 1, \mathbf{K}, m) \\ x_j \in \mathbf{Z} & (\text{for all or some of } j = 1, \mathbf{K}, n) \end{cases}$$

این مسأله، برنامه‌ریزی (خطی) با متغیرهای مقدار صحیح (شمار یا گسسته) نامیده می‌شود. اگر در همین مسأله برخی از متغیرها صحیح و برخی کسری باشند، برنامه‌ریزی (خطی) با اعداد مختلط نامیده می‌شود. در این قسمت با مدل‌سازی برنامه‌ریزی با اعداد صحیح و شیوه‌های اساسی حل مسأله‌های برنامه‌ریزی با اعداد صحیح و مختلط آشنا می‌شوید.

۲-۲- مدل‌هایی با متغیرهای صحیح

در بسیاری از مسائل برنامه‌ریزی خطی تنها زمانی متغیرهای تصمیم مفهوم پیدا می‌کنند که مقادیر صحیح به خود بگیرند و مقادیر غیرصحیح قابل قبول نمی‌باشند. این گونه مسائل را که صحیح بودن متغیرهای تصمیم آنها را از مسائل معمولی برنامه‌ریزی خطی متمایز می‌سازد مسائل برنامه‌ریزی صحیح گویند. در هر زمینه کاربردی، برنامه‌ریزی با اعداد صحیح می‌تواند مطرح باشد. در شروع برای بیان اهمیت این مدل‌ها، در اینجا سه زمینه از برنامه‌ریزی با اعداد صحیح را که نقش مهمی در پشتیبانی تصمیمات مدیران ایفا می‌کنند، معرفی می‌کنیم. در هر حالت تنها مدل‌های پایه‌ای را ارائه داده و توسعه‌های ممکن را پیشنهاد می‌دهیم.

۲-۲-۱- مسأله بودجه‌بندی سرمایه[۵]

در یک مسأله بودجه‌بندی سرمایه، ما باید از بین چند گزینه مطرح گزینه‌های بهینه را انتخاب کنیم. مسأله مورد نظر، برنامه‌ریزی با اعداد صحیح ۰ و ۱ می‌باشد. یعنی متغیرهای تصمیم، تنها مقادیر ۰ و ۱ را به خود می‌گیرند که مقدار ۰ به معنی عدم انتخاب سرمایه‌گذاری و ۱ به معنی انتخاب سرمایه‌گذاری است.

اگر متغیرها و پارامترها را به این صورت در نظر بگیریم:

متغیر تصمیم‌گیری: x_j

سود حاصل از j امین سرمایه‌گذاری: c_j

میزان استفاده j امین سرمایه‌گذاری از i امین منبع: a_{ij}

میزان موجود از منبع i ام: b_i

این مسأله به صورت زیر فرموله می‌شود:

$$\max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i = 1, \mathbf{K}, m) \\ x_j = 0,1 & (j = 1, \mathbf{K}, n) \end{cases}$$

با در نظر گرفتن ملاحظات منطقی، مدل بودجه‌بندی سرمایه می‌تواند خیلی غنی‌تر گردد. برای مثال فرض کنید سرمایه‌گذاری روی یک خط تولید جدید (پروژه i) منوط به سرمایه‌گذاری روی یک واحد تولیدی قبلی است (پروژه j). این وابستگی به سادگی توسط محدودیت $x_j \geq x_i$ یا $x_j - x_i \geq 0$ قابل فرموله کردن است. بدین معنی که اگر $x_i = 1$ باشد و پروژه i (تولید محصول جدید) قبول شود، در این صورت $x_j = 1$ می‌شود و این بدین معنی است که پروژه j بایستی انتخاب شود. مثال دیگر در نظر گرفتن پروژه‌های ناسازگار است. به عنوان نمونه، محدودیت $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 1$ بیان می‌کند که حداکثر یکی از این چهار پروژه می‌تواند انجام شود. همچنین اگر بخواهیم دو پروژه هر دو انجام شود یا هیچ کدام انجام نگیرد محدودیت $x_j = x_i$ یا $x_j - x_i = 0$ را به مدل اضافه می‌کنیم.

باید در نظر داشت که در مدل‌های پیوسته، زمان حل تابعی است $O(m^3)$ که m تعداد محدودیت‌ها می‌باشد و با افزودن محدودیت‌ها زمان حل برنامه افزایش میابد. اما در مدل‌های شمار هم تعداد محدودیت‌ها و هم تعداد متغیرها بر روی زمان حل مسأله تاثیرگذارند.

برای کاهش زمان حل مسأله، در برخی موارد می‌توان از روش‌های ابتکاری در نحوه فرمولاسیون جهت کاهش تعداد محدودیت‌ها استفاده کرد. مثلا اگر محدودیت ما انجام ۵ پروژه باهم و یا هیچ‌کدام باشد، به

---

[۵] Capital Budgeting

جای این که محدودیت‌ها را دوتا دوتا به صورت $x_1 = x_2, x_2 = x_3, \mathbf{L}$ بنویسیم، می‌توانیم این چند محدودیت را یکباره و به صورت $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4x_5$ بنویسیم. یا به عنوان مثالی دیگر اگر محدودیت ما امکان انتخاب از یکی از دو مجموعه $\{x_r, x_s, x_t\}$ و $\{x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$ باشد، می‌توان از یکی از دو فرم زیر استفاده کرد:

$$\begin{cases} x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \le 5y_1 \\ x_r + x_s + x_t \le 3y_2 \\ y_1 + y_2 \le 1 \end{cases}$$

و یا:

$$\begin{aligned} x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + 5x_r &\le 5 \\ x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + 5x_s &\le 5 \\ x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + 5x_t &\le 5 \end{aligned}$$

که در حالت دوم متغیر جدیدی به مسأله اضافه نشده است.

۲-۲-۲- مساله کوله‌پشتی

مسئله کوله‌پشتی اولین بار در دهه 50 توسط دانتزیک ارائه شد و به خاطر کاربردهای مستقیم در صنعت و مدیریت و استدلال‌های تئوریکی، وسعت زیادی یافت[16]. مسئله کوله‌پشتی که به مسئله بارگیری کشتی و مسئله بودجه‌بندی سرمایه یز شناخته می‌شود یکی از مسائل معروف IP است. این مسئله زمانی به وجود می‌آید که تخصیص منابع با محدودیت‌های مالی وجود داشته باشد.

ساده‌ترین مدل بودجه‌بندی سرمایه تنها یک محدودیت منبع دارد، که در علم مدیریت یکی از مدل‌های مهم به شمار می‌رود و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b \\ x_j = 0,1 \quad (j = 1, \mathbf{L}, n) \end{cases}$$

این مسأله، مسأله کوله‌پشتی نامیده می‌شود. زیرا شبیه به وضعیتی است که یک کوهنورد باید تصمیم بگیرد چه وسایلی را درسفرش به همراه داشته باشد. در اینجا c_j مطلوبیت[۶] به همراه داشتن وسیله j است که وزن آن $a_j > 0$ کیلوگرم است. هدف حداکثر کردن مطلوبیت است بدین شرط که بار همراه از b کیلوگرم تجاوز نکند.

---

[۶] Utility

به دلایل زیادی مدل کوله پشتی از اهمیت زیادی در برنامه‌ریزی خطی برخوردار است. روش‌های حل مدل کوله‌پشتی نقطه شروعی برای روش‌های حل برنامه‌های با اعداد صحیح در حالت کلی هستند. همچنین می‌توان نشان داد که تعداد زیادی از برنامه‌های با اعداد صحیح با آن معادل هستند.

نکته: اگر حمل بیش از یک واحد از هر وسیله مجاز باشد، به جای محدودیت $x_j = 0,1$ " از محدودیت " $x_j \geq 0 \ , \ x_j \in \mathbf{Z}$ " استفاده می‌کنیم.

۲-۲-۳- مسأله تعیین محل انبارها با هزینه ثابت مرکز پخش یا توزیع

در مدل‌سازی سیستم‌های توزیع باید درباره ارزش معاوضه‌های بین هزینه‌های حمل و نقل و هزینه‌های عملیاتی مراکز توزیع تصمیم گرفت.

به عنوان مثال فرض کنید مدیری باید تصمیم بگیرد از میان n انبار از کدام یک برای برآوردن تقاضای m مشتری برای کالایی استفاده کند. تصمیمات مورد نظر شامل انتخاب انبار و مقدار حمل کالا از هر انبار به هر مشتری است.

برای این مدل دو نوع محدودیت در نظر می‌گیریم:

۱. تقاضای d_j برای هر مشتری بایستی از انبارها تامین شود.

۲. کالا از یک انبار تنها وقتی حمل می‌شود که انبار باز باشد.

تابع هدف مجموع هزینه‌های حمل و نقل و هزینه‌های انبارداری و هزینه‌های ثابت برای فعال کردن انبارهاست.

اگر متغیرها و پارامترها را به این صورت در نظر بگیریم:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر انبار } i \text{ باز باشد:} \\ 0 & \text{اگر انبار } i \text{ باز نباشد:} \end{cases}$$

x_{ij}: مقدار کالایی که از انبار i به مشتری j فرستاده می‌شود:

f_i: هزینه ثابت فعال کردن برای انبار i:

c_{ij}: هزینه عملیاتی درانبار i به علاوه هزینه حمل و نقل از انبار i به مشتری j برای هر واحد از کالا:

با در نظر گرفتن این موضوع که تنها زمانی از یک انبار کالا حمل می‌شود که آن انبار باز باشد و اینکه کل کالای حمل شده از مقدار کل تقاضا نمی‌تواند زیادتر باشد؛ این مسأله به صورت زیر فرموله می‌شود:

$$\min \quad z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}+\sum_{i=1}^{n}f_i y_i$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=d_j & (j=1,\mathbf{L},m)\\ \sum_{j=1}^{m}x_{ij}-y_i(\sum_{j=1}^{m}d_j)\le 0 & (i=1,\mathbf{L},n)\\ x_{ij}\ge 0 & (i=1,\mathbf{L},n,\ j=1,\mathbf{L},m)\\ y_i=0,1 & (i=1,\mathbf{L},n)\end{cases}$$

۲-۲-۴- مسأله زمان‌بندی

تمام مسأله‌هایی که تحت عنوان توالی عملیات[۷] و زمان‌بندی و مسیریابی[۸] عنوان می‌شوند ذاتاً برنامه‌های با متغیرهای اعداد صحیح هستند.

به عنوان یک مثال خاص زمان‌بندی پرسنل پرواز خطوط هواپیمایی را در نظر بگیرید. یک شرکت هواپیمایی چند قطعه مسیر برای پرواز دارد. مثل پرواز ۷ صبح تهران - اصفهان و یا پرواز ۱ عصر اصفهان - مشهد. شرکت باید کادر خود رابرای مسیرها به نحوی تنظیم کند که تمام پروازها انجام شوند.

در این مدل، متغیرهای تصمیم‌گیری، زمانبندی و تخصیص کادرها را به مسیرها مشخص می‌کنند. اگر متغیرها و پارامترها را به این صورت در نظر بگیریم:

$x_j \begin{cases}1 & \text{اگر کادری به مسیر } j \text{ تخصیص داده شود:}\\ 0 & \text{اگر کادری به مسیر } j \text{ تخصیص داده نشود:}\end{cases}$

$a_{ij} \begin{cases}1 & \text{اگر قطعه } i \text{ در مسیر } j \text{ باشد:}\\ 0 & \text{اگر قطعه } i \text{ در مسیر } j \text{ نباشد:}\end{cases}$

c_j : هزینه تخصیص یک کادر به مسیر j

این مسأله را می‌توان به دو صورت فرموله کرد. صورت اول که به مدل تفکیک مجموعه معروف است به صورت زیر است:

---

[۷] Sequencing

[۸] Routing

$$\min \quad z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 1 & (i=1,\mathbf{L},m)\\ x_j = 0,1 & (j=1,\mathbf{L},n)\end{cases}$$

(مدل تفکیک مجموعه)

در مدل فوق محدودیت اول ایجاب می‌کند که یک کادر پرواز باید به یک مسیری که قطعه پرواز i را در بر دارد، تخصیص داده شود. صورت دوم از این مسأله که به مدل پوشش مجموعه‌ها معروف است، اجازه می‌دهد که کادر پرواز نیز مانند سایر مسافرین در هواپیما سوار شود. مدل پوشش مجموعه‌ها به صورت زیر است:

$$\min \quad z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1 & (i=1,\mathbf{L},m)\\ x_j = 0,1 & (j=1,\mathbf{L},n)\end{cases}$$

(مدل پوشش مجموعه)

برای مثال اگر $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 3$ باشد در این صورت دو کادر پرواز به عنوان مسافر پرواز می‌کنند تا بین سایر قطعه پروازها انجام وظیفه کنند.

۲-۲-۵- مسأله تخصیص

فرض شود ما n کار و n ماشین داریم و هزینه تخصیص کار i به ماشین j برابر c_{ij} است. می‌خواهیم یک رابطه یک به یک بین کارها و ماشین‌ها طوری برقرار نماییم که هزینه کل حداقل گردد. متغیر تصمیم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{اگرکار } i \text{ به ماشین } j \text{ تخصیص یابد:}\\ 0 & \text{در غیراین صورت:}\end{cases}$$

مدل این مسأله به این شکل است:

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & (i = 1, \mathbf{K}, n) \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & (i = 1, \mathbf{K}, n) \\ x_{ij} = 0,1 & (i, j = 1, \mathbf{K}, n) \end{cases}$$

باید توجه داشت که می‌توان به مدل تخصیص به عنوان یک مدل حمل و نقل که در آن مقادیر عرضه‌ها و تقاضاها برابر یک واحد است نگاه کرد.

۲-۲-۶- مسأله فروشنده دوره‌گرد یا سیار

در اوایل سال ۱۹۳۲ در کتابی که در آلمان به چاپ رسید به مسأله فروشنده دوره‌گرد اشاره شد. پس از آن در سال ۱۹۴۸ شرکت رند[۹] مسأله فروشنده دوره‌گرد را دوباره معرفی کرد و شهرت این شرکت در اروپا سبب شد مسأله فروشنده دوره‌گرد مشهور گردد. پس از آن این مسأله در طول سال‌ها ذهن محققین علاقه‌مند را به خود معطوف داشته است؛ به طوری که تا به حال مقاله‌های زیادی در باره حل این مسأله به چاپ رسیده است. برای اطلاعات بیشتر مرجع [۱] توصیه می‌گردد.

فرض کنید n شهر داریم. می‌خواهیم از یک شهر شروع به حرکت نموده و به هر شهر فقط یک بار وارد و فقط یک بار خارج شویم و در انتها به شهر مبدا باز گردیم؛ با این شرط که مسافت طی شده کمترین مسافت باشد. این مسأله را مسأله فروشنده دوره‌گرد می‌نامند و به مسیری که به این صورت به وجود می‌آید، تور گفته می‌شود.

در صورتی که مسافت شهر m به شهر k با مسافت شهر k به شهر m برای تمام مقادیر m و k برابر باشد، مسأله فروشنده دوره‌گرد را متقارن و در غیر این صورت مسأله فروشنده دوره‌گرد را نامتقارن می‌نامند.

برای فرموله کردن این مسأله، به محدودیت‌هایی احتیاج داریم که از ایجاد زیرتور در جواب نهایی جلوگیری کند. منظور از زیرتور مسیرهای بسته جدا از هم است که مطلوب مسأله نیست.

با فرض اینکه تعداد کل شهرها n است و C_{ij} هزینه (فاصله یا زمان) رفتن از شهر i ام به شهر j ام باشد با استفاده از متغیرهای دوگانه x ها که مقدار ۰ یا ۱ را به‌خود می‌گیرند به‌گونه‌ای که $x_{ij} = 1$ اگر و فقط اگر از از شهر i ام به شهر j ام برویم مدل خطی این مسأله با این شرط که اندیس‌های i و j برابر نباشند به صورت زیر می‌باشد[۵]. در این مدل آن دسته از محدودیت‌هایی که در آنها از U ها استفاده شده

---

[۹] Rand

است از ایجاد هر نوع زیر تور جلوگیری می‌کنند. برای مثال اگر از شهر i ام به شهر j ام و سپس از شهر j ام به شهر k ام برویم میبایست داشته باشیم:

$$U_i - U_j \le -1 \text{ و } U_j - U_k \le -1$$

تا معادلات مربوطه صادق گردند که با جمع این دو نامعادله خواهیم داشت $U_i - U_k \le -2$ لذا داریم:

$$U_k - U_i \ge 2 \text{ و } U_k - U_j \ge 1 \text{ و } U_j - U_i \ge 1$$

که این مقادیر مثبت رفتن از شهر j ام به شهر i ام و رفتن از شهر k ام به شهر j ام و رفتن از شهر k ام به شهر i ام را غیر ممکن می‌کنند. برای دیدن برخی مدل‌های دیگر این مسأله به مراجع [۱] تا [۵] مراجعه نمائید

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & (j = 1, \mathbf{K}\, n,\ i \ne j) \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & (i = 1, \mathbf{K}, n,\ i \ne j) \\ U_i - U_j + n x_{ij} \le n - 1 & (2 \le i \le n,\ 2 \le j \le n,\ i \ne j) \\ x_{ij} = 0,1 & (i = 1, \mathbf{K}, n,\ j = 1, \mathbf{K}, n,\ i \ne j) \\ U_j > 0 & (j = 1, \mathbf{K}, n) \end{cases}$$

مسأله عمومی فروشنده دوره‌گرد در زمره مسأله‌های بهینه‌سازی ترکیبی قرار دارد که زمان حل آن تابعی نمایی از تعداد شهرها می‌باشد.

مسأله فروشنده دوره‌گرد کاربردهای زیادی دارد. مسیریابی ابزار، قالب‌ها، قوس‌های برقی، مشعل‌ها، پرتوافکن‌ها و بخاردهندگان برای تولید یک ویژگی خاص برروی یک قطعه از نمونه‌های دو بعدی و سه بعدی مسأله فروشنده دوره‌گرد می‌باشد.

یکی دیگر از کاربردهای مرتبط با این مسأله، در مورد شرکت‌های توزیع کالا می‌باشد. برای مثال یک شرکت پخش فرآورده‌های لبنی را در نظر بگیرید که باید روزانه حمل و نقل کالای خود را به m مکان مختلف یک شهر انجام دهد و برای انجام این کار t وسیله نقلیه در اختیار دارد. می‌توان به کمک مدل مسأله فروشنده دوره‌گرد، مسافت طی شده بین کارخانه و این m مکان را به حداقل ممکن کاهش و کار توزیع را با کمترین تعداد وسیله نقلیه انجام داد که در نهایت با کاهش هزینه‌های حمل و نقل، بازدهی کار افزایش

می‌یابد و در مصرف سوخت و آلودگی هوا و حجم ترافیک کاهش ایجاد می‌شود. در این گونه مسأله‌ها به علت یک طرفه بودن برخی مسیرها و یا تفاوت حجم ترافیک در دو جهت یک خیابان دو طرفه، مسأله ما یک مسأله نامتقارن است. بنابراین این مسأله علاوه بر جنبه نظری از جنبه کاربردی هم دارای اهمیت می‌باشد.

به طور کلی از دو دسته از روش‌ها برای حل مسأله فروشنده دوره‌گرد استفاده می‌شود: روش‌های دقیق و روش‌های ابتکاری.

روش‌های دقیق این مزیت را دارند که در نهایت جواب بهینه را به دست می‌دهند. اما یکی از معایب آنها این است که به دلیل در نظر گرفتن تمام مجموعه‌های قابل قبول برای یافتن جواب بهینه در مورد مسأله‌های بزرگ وقت‌گیر و در بسیاری از موارد غیر عملی می‌باشند. اما در ابعاد کوچک جواب‌های بهینه را در اختیار قرار می‌دهند. از جمله روش‌های دقیق برای حل مسأله فروشنده دوره‌گرد می‌توان روش‌های شمارش کامل [۲]، شاخه و کرانه[۱۰] [۳] (برای مثال روش‌های لیتل و ایستمن[۱۱]) و برنامه‌ریزی پویا[۱۲] [۲] را نام برد.

در مسأله‌های بهینه‌سازی ترکیبی با افزایش اندازه مسأله، راه حل‌های دقیق جواب بهینه را در زمان قابل قبول به دست نمی‌دهند. در این گونه موارد راه‌حل‌های ابتکاری مناسب به نظر می‌رسند که از جمله روش‌های ابتکاری می‌توان الگوریتم نزدیکترین شهر دیدار نشده را نام برد.

مدل فروشنده سیار به عنوان جزء اصلی بسیاری از مدل‌های مسیریابی و زمان‌بندی وسایل نقلیه به کار گرفته می‌شود، همچنین در زمان‌بندی تولید هم این مدل مطرح می‌شود. برای مثال ترتیب‌بندی $n-1$ کار بر روی یک ماشین با c_{ij} هزینه آماده‌سازی ماشین برای کار j باشد با فرض این که کار i توسط ماشین کامل شده باشد.

---

[۱۰] Branch and Bound

[۱۱] Little and Eastman

[۱۲] Dynamic Programming

۲-۳- فرموله کردن برخی محدودیت‌های مورد نیاز در یک مسأله مدل‌سازی

در مدل بودجه بندی سرمایه، فرموله کردن محدودیت‌های پروژه‌های پیش‌نیازی و پروژه‌های ناسازگار را در برنامه‌ریزی اعداد صحیح دیدیم. در این قسمت روش‌های فرموله کردن برخی محدودیت‌های مورد نیاز در یک مسأله مدل‌سازی را به طور کامل‌تر با هم مرور می‌کنیم:

۲-۳-۱- پروژه‌های پیش‌نیازی

سرمایه‌گذاری روی یک خط تولید منوط به سرمایه‌گذاری روی یک واحد تولیدی قبلی است. این وابستگی توسط محدودیت $x_j \geq x_i$ قابل فرموله شدن است. یعنی اگر $x_i = 1$ شد، x_j نیز باید انجام گیرد. یعنی x_j پیش‌نیاز x_i است.

۲-۳-۲- پروژه‌های ناسازگار

اگر بخواهیم حداکثر یکی از n پروژه را برای سرمایه‌گذاری انتخاب کنیم، از محدودیت زیر استفاده می‌کنیم.

$$x_1 + x_2 + \mathbf{L} + x_n \leq 1$$

یعنی یا هیچ کدام از n پروژه اجرا نشود و یا حداکثر یکی از n پروژه می‌تواند اجرا شود.

۲-۳-۳- امکان‌پذیری محدودیت

اگر در مورد یک محدودیت خاص بخواهیم بررسی کنیم که آیا مقادیر معینی از متغیرهای تصمیم‌گیری باید در یک محدودیت صدق کند یا نه به صورت زیر عمل می‌کنیم:

محدودیت را به صورت $f(x_1, x_2, \mathbf{L}, x_n) \leq b$ در نظر می‌گیریم و متغیر y را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$y = \begin{cases} 0 & \text{مقادیردرمحدودیت باید صدق کند} \\ 1 & \text{درغیر این صورت} \end{cases}$$

در نتیجه محدودیت به شکل زیر در می‌آید:

$$f(x_1, x_2, \mathbf{L}, x_n) \leq b + My$$

که M مقدار بزرگی می‌باشد. اگر $y=1$ باشد محدودیت جدید همواره برقرار است، و هرگاه $y=0$ باشد محدویت اصلی صادق است.

۲-۳-۴- محدودیت‌های جایگزین

اگر بخواهیم از بین دو محدودیت حداقل یکی و نه لزوما هر دوی این محدودیت‌ها صادق باشد به صورت زیر عمل می‌کنیم.

فرض کنید بخواهیم از دو محدودیت $f(x_1, x_2, \mathbf{L}, x_n) \le b_1$ و $f(x_1, x_2, \mathbf{L}, x_n) \le b_2$ حداقل یکی برقرار باشد. در این صورت می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
&f(x_1, x_2, \mathbf{L}, x_n) \le b_1 + My_1 \\
&f(x_1, x_2, \mathbf{L}, x_n) \le b_2 + My_2 \\
&y_1 + y_2 = 1 \\
&y_1, y_2 = 0,1
\end{aligned}$$

که در آن M عددی است بزرگ نسبت به ابعاد مسأله. با توجه به این که به جای محدودیت انتخاب یکی بین دو تا، یعنی $y_1 + y_2 = 1$ می‌توان $y_2 = 1 - y_1$ را قرار داد و در فرمولاسیون فوق یکی از متغیرها را حذف کرد:

$$\begin{aligned}
&f(x_1, x_2, \mathbf{L}, x_n) \le b_1 + My_1 \\
&f(x_1, x_2, \mathbf{L}, x_n) \le b_2 + M(1 - y_1) \\
&y_1 = 0,1
\end{aligned}$$

به عنوان مثال فرض کنید در مسأله‌ای هدف تولید یک محصول باشد و دو روش برای تولید این محصول وجود داشته باشد. می‌خواهیم از بین دو روش که دو محدودیت متفاوت را به مسأله اعمال می‌کند، یکی را انتخاب کنیم. فرض کنید دو محدودیت به صورت $6x_1 + 5x_2 \le 60$ و $4x_1 + 5x_2 \le 50$ وجود داشته باشد. بسته به این که کدام روش برای تولید انتخاب شود، متغیرهای تصمیم‌گیری x_1 و x_2 باید در محدودیت اولی یا دومی صدق کند که به این صورت نمایش داده می‌شود:

$$\begin{aligned}
&6x_1 + 5x_2 \le 100y + 60 \\
&4x_1 + 5x_2 \le 50 + 100(1 - y) \\
&y = 0,1
\end{aligned}$$

۲-۳-۵- محدودیت‌های شرطی

این محدودیت‌ها به شکل منطقی زیر هستند:

$$f_1(x_1, x_2, \mathbf{L}, x_n) > b_1 \Rightarrow f_2(x_1, x_2, \mathbf{L}, x_n) \le b_2$$

که با توجه به $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$، معادل با محدودیت زیر می‌باشد:

$$f_1(x_1, x_2, \mathbf{L}, x_n) \le b_1 \vee f_2(x_1, x_2, \mathbf{L}, x_n) \le b_2$$

حال اگر بخواهید حداقل k محدودیت از m محدودیت برقرار باشد:

$$\begin{cases} g_1(x) \le b_1 \\ \mathbf{M} \\ g_m(x) \le b_m \end{cases} \rightarrow \begin{cases} g_1(x) \le b_1 + m y_1 \\ \mathbf{M} \\ g_m(x) \le b_m + m y_m \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \le m - k$$

$$y_i = 0,1 \quad i = 0,1,\mathbf{L}, m$$

حداقل k تا از y_iها صفر است.

مثلاً اگر بخواهید از سه محدودیت حداقل یکی از آنها برقرار باشد به صورت $y_1 + y_2 + y_3 \le 2$ باید عمل کرد. (توجه داشته باشید که اگر $y_i = 0$ باشد، محدودیت باید صدق کند)

مثال:

فرض کنید متغیر x فقط بتواند مقادیر خاصی بگیرد. مثلاً اگر x بتواند بین مقادیر زیر قرار بگیرد:

$$0 \le x \le 10 \quad \text{or} \quad 22.5 \le x \le 47.8 \quad \text{or} \quad 79.2 \le x \le 130$$

در اینجا برای سه محدودیت، سه متغیر تعریف می‌کنیم که هر کدام به یک قسمت مرتبط می‌باشد:

$$0 \le x_1 \le 10 \quad \text{or} \quad 22.5 \le x_2 \le 47.8 \quad \text{or} \quad 79.2 \le x_3 \le 130$$

و شرایطی ایجاد می‌کنیم که فقط یکی از محدودیت‌ها صادق باشد:

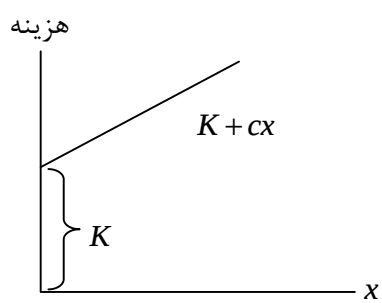
$$\begin{cases} 0 \le x_1 \le 10 y_1 \\ 22.5 y_2 \le x_2 \le 47.8 y_2 \\ 79.2 y_3 \le x_3 \le 130 y_3 \\ \sum_{i=1}^{3} y_i = 1 \qquad y_i = 0,1 \quad (i = 1,2,3) \\ \\ x = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} y_1 = 1 \Rightarrow y_2 = y_3 = 0 \rightarrow x = x_1 \quad 0 \le x \le 10 \\ y_2 = 1 \Rightarrow y_1 = y_3 = 0 \rightarrow x = x_2 \quad 22.5 \le x \le 47.8 \\ y_3 = 1 \Rightarrow y_2 = y_1 = 0 \rightarrow x = x_3 \quad 79.2 \le x \le 130 \end{cases}$$

۲-۳-۶- هزینه‌های ثابت

در بسیاری از موارد تابع هدف برای مسأله حداقل کردن حاوی هزینه‌های ثابت است (مانند هزینه‌های ثابت اولیه در طراحی، هزینه‌های ثابت سرمایه‌گذاری و غیره). به عنوان مثال، هزینه‌های تولید x واحد از محصول خاصی ممکن است از هزینه ثابت راه‌اندازی تجهیزات و هزینه متغیر برای تولید هر واحد تشکیل شود. یک نمونه از این نوع هزینه در شکل زیر ارائه شده است.



$$\text{هزینه} \quad \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0 \\ K + cx & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

فرض کنید که تجهیزات دارای ظرفیت B واحد است. y را به عنوان یک متغیر دوتایی تعریف می‌کنیم که نشان می‌دهد چه موقعی هزینه ثابت انجام شده است؛ به طوری که $y = 1$ است هرگاه $x > 0$ باشد و $y = 0$ است هرگاه $x = 0$ باشد. در این صورت مقدار هزینه را می‌توان برحسب x به صورت زیر نوشت:

$$ky + cx$$

با محدودیت‌هایی به فرم:

$$\begin{cases} x \le By \\ x \ge 0 \\ y = 0 \quad \text{or} \quad 1 \end{cases}$$

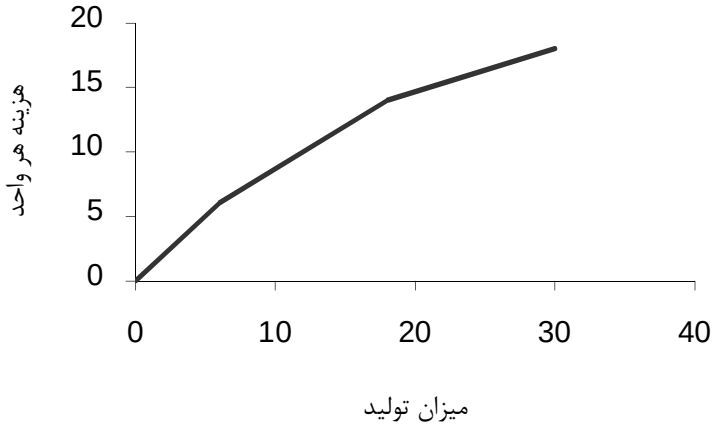
همچنان که می‌خواستیم هرگاه هزینه ثابت انجام نشده باشد، یعنی وقتی که $y = 0$ است این محدودیت‌ها نتیجه می‌دهند که $x = 0$ است. خود محدودیت‌ها نشان نمی‌دهند که اگر $x = 0$ باشد، $y = 0$ خواهد شد؛ بلکه وقتی که $x = 0$ است، عمل حداقل کردن به وضوح $y = 0$ را انتخاب می‌کند تا هزینه ثابت انجام نشود. بالاخره مشاهده می‌شود که اگر $y = 1$ باشد، محدودیت اضافه شده تبدیل به $x \le B$ می‌شود که حد ظرفیت روی تولید تجهیزات را منعکس می‌نماید.

۲-۳-۷- صرفه‌جویی به مقیاس

هرچه تعداد تولیدات بیشتر شود هزینه هر واحد کالا کمتر می‌شود که به آن صرفه‌جویی به مقیاس می‌گویند. فرض کنید تولید تا a واحد هزینه‌اش 1، از سطح تولید a تا b هر واحد هزینه‌اش $\frac{2}{3}$ و از سطح تولید b تا g هر واحد هزینه‌اش $\frac{1}{3}$ باشد. مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Minimize} \qquad f(x) = x_1 + \tfrac{2}{3}x_2 + \tfrac{1}{3}x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x = x_1 + x_2 + x_3 \ge 20 \\ 0 \le x_1 \le a = 6 \\ 0 \le x_2 \le b - a = 12 \\ 0 \le x_3 \le g - b = 12 \end{cases}$$



اگر این روابط به همین صورت وارد محدودیت‌ها شود ممکن است جواب صحیحی به دست نیاوریم؛ زیرا جواب بهینه‌ای که به دست می‌آید، قابل قبول نیست. به عنوان مثال اگر جواب $x_1 = 1$ و $x_2 = 12$ و $x_3 = 12$ باشد، این جواب قابل قبول نیست. چون باید ابتدا x_1 به حد بالای خود برسد و بعد متغیر دوم مقدار مثبت به خود بگیرد. بنابراین برای این که محدودیت‌ها درست باشد و جواب صحیح بدهد، باید سه محدودیت آخر را با روابط زیر جایگزین کرد:

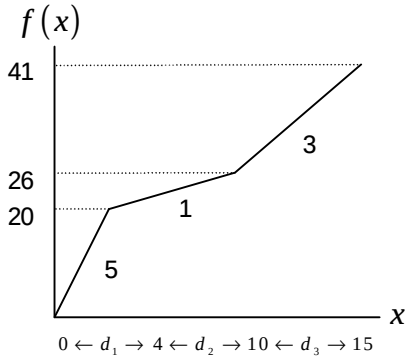
$$
\begin{aligned}
& a y_1 \le x_1 \le a \\
& (b-a) y_2 \le x_2 \le (b-a) y_1 \\
& 0 \le x_3 \le (g-b) y_2 \\
& y_1, y_2 = 0,1
\end{aligned}
$$

در اینجا محدودیت‌هایی به مدل تحمیل شده است، تا ابتدا x_1 سپس x_2 و بعد از آن x_3 مقدار بگیرد.

نکته: اگر هدف حداقل کردن یک تابع مقعر باشد، باید از محدودیت‌های بالا استفاده کرد. اما اگر تابع محدب بوده یا تابع هدف حداکثر کردن تابع مقعر باشد نیازی به استفاده از محدودیت‌های بالا نیست.

۲-۳-۸- توابع یک متغیره غیر خطی پاره خطی

نوع دیگر از توابع غیرخطی که قابل نمایش توسط متغیرهای صحیح است، منحنی قطعه‌بندی شده خطی می‌باشد. شکل زیر منحنی هزینه توسعه یک واحد تولیدی را که حاوی سه قطعه خطی با هزینه‌های متغیر ۵ و ۱ و ۳ میلیون دلار برای توسعه هر ۱۰۰ واحد می‌باشد را نشان می‌دهد.



برای مدل کردن منحنی هزینه، هر مقدار x را به صورت مجموع سه متغیر d_1 و d_2 و d_3 نشان می‌دهیم. تا هزینه هر یک از این متغیرها خطی باشد. بنابراین:

$$x = d_1 + d_2 + d_3$$

که در آن

$$0 \le d_1 \le 4$$
$$0 \le d_2 \le 6$$
$$0 \le d_3 \le 5$$

و کل هزینه متغیر عبارتست از:

$$\text{Cost} = 5d_1 + d_2 + 3d_3$$

توجه کنید که متغیرها طوری تعریف شده‌اند که:

- d_1 به مقداری از x که از صفر بیشتر باشد ولی کوچکتر یا مساوی ۴ باشد مر بوط می‌شود.
- d_2 مازاد مقدار x از ۴ است تا موقعی که x کوچکتر یا مساوی ۱۰ است.
- d_3 مازاد مقدار x از ۱۰ است تا موقعی که x کوچکتر یا مساوی ۱۵ است.

اگر قرار باشد چنین تفسیری صحیح باشد، همچنین نیاز داریم که $d_1 = 4$ باشد هرگاه $d_2 > 0$، و $d_2 = 6$ باشد، هرگاه $d_3 > 0$ باشد.در غیر این صورت مثلا وقتی که $x = 2$ است، هزینه درصورتی حداقل می‌شود که $d_1 = d_3 = 0$ و $d_2 = 2$ انتخاب شوند؛ زیرا متغیر d_2 کمترین هزینه متغیر را دارد. اما شرایط حاکم بر متغیرها در واقع همان محدودیت‌های شرطی هستند که به سادگی با استفاده از متغیرهای دوتایی مانند قبل قابل مدل شدن هستند.

اگر فرض کنیم:

$$w_1 = \begin{cases} 1 & \text{اگر } d_1 \text{ در حد بالایی خود باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$w_2 = \begin{cases} 1 & \text{اگر } d_2 \text{ در حد بالایی خود باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این صورت برای حصول اطمینان از برقراری محدودیت‌های شرطی مناسب، محدودیت‌های زیر می‌توانند جایگزین محدودیت‌های قبلی شوند.

$$\begin{aligned}
&Minimize \quad f(d) = 5d_1 + d_2 + 3d_3 \\
&Subject\ to: \\
&x = d_1 + d_2 + d_3 \\
&4w_1 \le d_1 \le 4 \\
&6w_2 \le d_2 \le 6w_1 \\
&0 \le d_3 \le 5w_2 \\
&w_1, w_2 \quad \text{Binary}
\end{aligned}$$

توجه کنید که اگر $w_1 = 0$ باشد، در این صورت $w_2 = 0$ خواهد شد تا شرط امکان‌پذیری برای محدودیت اعمال شده روی d_2 حفظ شود و محدودیت‌های فوق تبدیل می‌شوند به:

$$\begin{aligned}
&0 \le d_1 \le 4 \\
&d_2 = 0 \\
&d_3 = 0
\end{aligned}$$

و اگر $w_1 = 1$ و $w_2 = 0$ باشد، در این صورت محدودیت‌های فوق تبدیل می‌شوند به:

$$\begin{aligned}
&d_1 = 4 \\
&0 \le d_2 \le 6 \\
&d_3 = 0
\end{aligned}$$

و بالاخره اگر $w_1 = 1$ و $w_2 = 1$ باشد، در این صورت محدودیت‌های فوق تبدیل می‌شوند به:

$$\begin{aligned}
&d_1 = 4 \\
&d_2 = 6 \\
&0 \le d_3 \le 5
\end{aligned}$$

بنابراین مشاهده می‌کنیم که سه ترکیب امکان‌پذیر برای مقادیر w_1 و w_2 وجود دارد:

- $w_1 = 0$ و $w_2 = 0$ که مربوط می‌شود به $0 \le x \le 4$ زیرا $d_2 = d_3 = 0$
- $w_1 = 1$ و $w_2 = 0$ که مربوط می‌شود به $4 \le x \le 10$ زیرا $0 \le d_2 \le 6, d_1 = 4$
- $w_1 = 1$ و $w_2 = 1$ که مربوط می‌شود به $10 \le x \le 15$ زیرا $d_1 = 4, d_2 = 6$

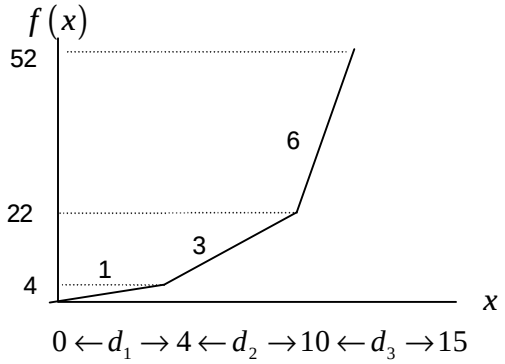
برای منحنی‌های خطی قطعه‌بندی شده با هر تعداد قطعه، تکنیک کلی مشابهی قابل به کارگیری است، محدودیت کلی روی متغیر d_1 برای j امین قطعه عبارت است از:

$$L_j w_j \le d_j \le L_j w_{j-1}$$

که در آن L_j طول قطعه است.

۲-۳-۹- عدم صرفه‌جویی به مقیاس

حالت خاص مهمی از نمایش توابع غیرخطی هنگامی اتفاق می‌افتد که عدم صرفه‌جویی به مقیاس مد نظر است. یعنی وقتی که هزینه‌های حاشیه‌ای برای یک مسأله حداقل کردن در حال افزایش هستند یا عواید حاشیه‌ای برای یک مسأله حداکثر کردن در حال کاهش می‌باشند. فرض کنید هزینه توسعه در مثال قبلی، توسط شکل زیر مشخص شده باشد.



شکل ۶-۹ عدم صرفه‌جویی به مقیاس

در این حالت هزینه به شکل زیر نشان داده می‌شود:

$$\text{هزینه} = d_1 + 3d_2 + 6d_3$$

تنها محدودیت‌های لازم عبارتند از:

$$0 \le d_1 \le 4$$
$$0 \le d_2 \le 6$$
$$0 \le d_3 \le 5$$

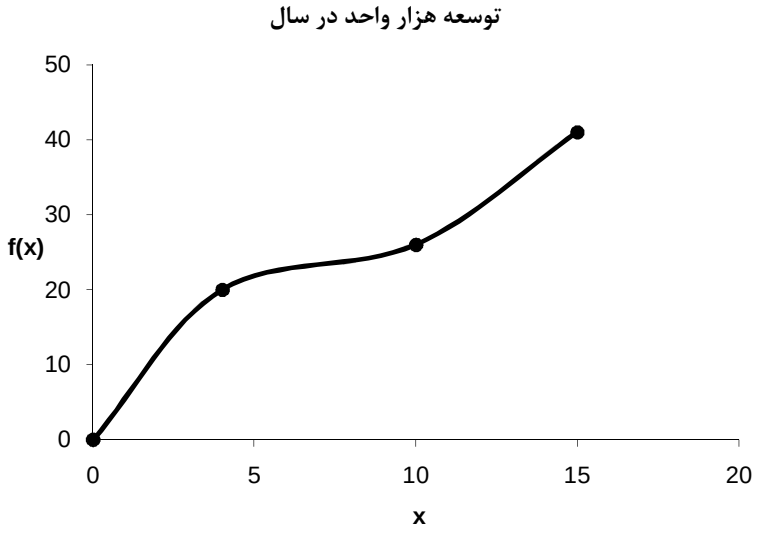
اگر این نوع منحنی هزینه در تابع هدف یک مسأله حداقل کردن ظاهر گردد؛ محدودیت‌های شرطی در فرمولاسیون قبلی که متغیرهای دوتایی بودند، قابل صرف‌نظر کردن هستند. زیرا ضرایب d_3, d_2, d_1 نتیجه می‌دهد که همواره بهتر است قبل از این که $d_2 > 0$ شود $d_1 = 4$ انتخاب گردد و قبل از این که $d_3 > 0$ شود $d_2 = 6$ انتخاب گردد. در نتیجه متغیرهای صحیح به کلی حذف شده‌اند.

اما اگر صرفه‌جویی به مقیاس وجود داشته باشد، این نمایش بدون متغیرهای صحیح درست نیست. برای مثال اگر تابع داده شده درشکل ۶-۹، در یک مسأله حداکثرکردن ظاهر شود، بهترین کار انتخاب قطعه سوم

با متغیر d_3 قبل از انتخاب دو قطعه اول خواهد بود؛ زیرا عایدی این قطعه بیشتر است. در این گونه مواقع استفاده از متغیر دوتایی بخش گذشته الزامی می‌باشد.

۲-۳-۱۰- تقریب خطی مدل غیرخطی

یکی از مفیدترین کاربردهای توابع خطی قطعه‌بندی شده، تقریب پاره خطی توابع غیرخطی یک متغیره است. به عنوان مثال فرض کنید هزینه توسعه مورد بحث ما مطابق شکل زیر باشد:



نقاط شکست معمولا به دلخواه انتخاب می‌شود، ولی گاهی طبق شرایط مسأله نقاط شکست مشخص می‌شود.

چنانچه قطعه خطوطی که نقاط انتخاب شده روی منحنی را به هم وصل می‌کنند به هم وصل شود، یک تقریب پاره خطی به دست می‌آید. که در مدل می‌تواند به جای منحنی بالا مورد استفاده قرار گیرد.

با استفاده از نقاط بیشتر روی منحنی می‌توان تقریب را به هر اندازه که بخواهیم دقیق‌تر کنیم.

تمرین:

یک تقریب پاره خطی برای مسأله زیر بیابید که نقاط شکست برای x_1 ؛ ۲۰، ۱۰، ۵، ۰ باشد و نقاط شکست برای x_2؛ ۰،۴،۱۱،۱۶،۲۲،۳۰ باشد.

$$\min \quad 2x_1^3 - 4x_1^2 + 10x_1 - 3x_2^2 + 3x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ x_1^2 + 2x_1 - 2x_2^2 + 6x_2 \geq 5 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

۲-۴- روش‌های حل مدل‌های دارای متغیرهای صحیح

در برابر روش سیمپلکس که روش خوبی برای حل برنامه‌های خطی است، روش خاص و واحدی برای حل برنامه‌های با اعداد صحیح وجود ندارد. بلکه طی مرور زمان، روش‌های متعددی توسعه یافته که عملکرد هر تکنیک، به نوع مسأله بستگی دارد.

روش‌های موجود را می‌توان در سه گروه عمده طبقه‌بندی کرد:

- تکنیک‌های شمارشی[۱۳] شامل روش شاخه و کرانه[۱۴]
- تکنیک‌های صفحه برشی[۱۵]
- تکنیک‌های نظریه گروه[۱۶]

روش‌های حل را می‌توان به دو گروه عمده روش‌های کلاسیک و غیرکلاسیک تقسیم‌بندی کرد. از جمله روش‌های کلاسیک روش برشی، روش شاخه و کرانه و روش شمارش ضمنی می‌باشد که روش شمارش ضمنی برای هر دو مدل خطی و غیرخطی به کار می‌رود.

در روش برشی و روش شاخه و کرانه ابتدا مسأله خطی و بدون شرط صحیح بودن در نظر گرفته می‌شود. پس از حل، جواب‌های به دست آمده کنترل می‌شود. اگر جواب‌ها در شروط صدق نکرد، باید با استفاده از تکنیک‌های برشی و شاخه و کرانه در جهت به دست آوردن جواب بهینه حرکت کنیم.

۲-۴-۱- روش مجارستانی برای حل مسأله تخصیص

مدل عمومی مسأله تخصیص را در نظر بگیرید:

$$\min \quad z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & j = 1,\dots,n \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & i = 1,\dots,n \\ x_{ij} = 0,1 & i, j = 1,\dots,n \end{cases}$$

روش مجارستانی بر این اصل بنا شده است که اگر به یکی از سطرها یا ستون‌های ماتریس تخصیص C، مقدار ثابت k را اضافه نماییم جواب بهینه تغییری نمی‌کند. دلیل این امر این است که اضافه کردن مقدار

---

[۱۳] Enumeration

[۱۴] Branch and Bound

[۱۵] Cutting-Plane

[۱۶] Group-Theoretic

ثابت k به همه اعداد یک سطر یا ستون ماتریس C باعث می‌شود که مقدار ثابت k به تابع هدف مسأله جدید اضافه گردد:

$$Z' = Z + k$$

و می‌دانیم که وجود یا عدم وجود یک مقدار ثابت در تابع هدف جواب بهینه مسأله را تغییر نمی‌دهد و تنها بر مقدار تابع هدف اثر دارد.

برای مثال اگر سطر p ام را انتخاب کنیم و به همه اعداد آن k را اضافه کنیم؛ یعنی به جای بردار:

$$\vec{c}_{p_0} = \left(c_{p1}, c_{p2}, \mathbf{K}, c_{pn}\right)$$

بردار:

$$\vec{c}'_{p_0} = \left(c_{p1} + k, c_{p2} + k, \mathbf{K}, c_{pn} + k\right)$$

را جایگزین نماییم و ماتریس جدید را C' بنامیم آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} Z' &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c'_{ij}x_{ij} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} c'_{pj}x_{ij} = \\ &= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\left(c_{pj} + k\right)x_{pj} = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + k\sum_{j=1}^{n} x_{pj} = Z + k \end{aligned}$$

از آنجا که با توجه به محدودیت‌های مسأله تخصیص $\sum_{j=1}^{n} x_{pj} = 1$ است نتیجه می‌گیریم که اگر به همه اعداد ماتریس C نیز یک مقدار ثابت k اضافه نماییم؛ جواب مسأله تخصیص تغییری نمی‌کند. بنابراین با استفاده از دو اصل فوق مسأله تخصیص را با انجام بندهای زیر حل می‌نماییم:

گام ۱: در صورت لزوم یک عدد مناسب به همه عناصر ماتریس C اضافه کنید تا شرط $C \geq 0$ برقرار شود.

گام ۲: روند ایجاد حداقل یک صفر در هر سطر و ستون: عناصر هر سطر و ستون را به اندازه کوچکترین عنصر آن سطر یا ستون کاهش دهید تا در هر سطر و ستون حداقل یک صفر داشته باشید. ماتریس حاصل را $\overline{C}$ بنامید.

گام ۳: روند تخصیص: از سطر یا ستونی که حداقل تعداد صفر باقیمانده را دارد شروع کنید.

الف. اگر دیگر در ماتریس باقیمانده صفری وجود ندارد به گام ۴ بروید.

ب. اگر $\bar{c}_{ij}$ تنها صفر باقیمانده سطر i ام ویا ستون j ام است قرار دهید $x_{ij}=1$ و با حذف سطر i و ستون j، تعداد صفرهای باقیمانده را در سایر سطر و ستون های باقیمانده را بهنگام نمائید و به گام ۳ برگردید.

ب. اگر در همه سطرها و ستون‌های ماتریس باقیمانده تعداد صفرهای باقیمانده دو یا بیشتر باشند، از سطر یا ستونی که حداقل تعداد صفر را دارد شروع کنید و یکی از خانه‌های دارای صفر مثل $\overline{C_{pq}}$ را به دلخواه انتخاب کنید و x_{pq} مربوط را یک قرار دهید و با حذف سطر p ام و ستون qام تعداد صفرهای باقیمانده را در سایر سطر و ستون های باقیمانده را بهنگام نمائید و به گام ۳ برگردید.

گام ۴: در ماتریس باقیمانده صفری وجود ندارد، حال:

الف. اگر در هر سطر و ستون یک تخصیص صورت گرفته است جواب فعلی یک جواب قابل قبول است که مقدار تابع هدف آن صفر است؛ یعنی $\overline{Z}=0$. چونکه در خانه‌هایی که $x_{ij}=1$ است، $\bar{c}_{ij}$ آن صفر است و در سایر خانه‌ها $x_{ij}=0$ است. بنابراین:

$$\overline{Z}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\bar{c}_{ij}x_{ij}=0$$

از آنجایی‌که برای ماتریس $\overline{C}\geq 0$ حداقل مقدار تابع هدف (با توجه به این که $X\geq 0$ می‌باشد) صفر است. یعنی $\overline{Z}\geq 0$ است و هر جواب قابل قبول با مقدار $\overline{Z}=0$ به طور یقین یک جواب بهینه است.

ب. اگر تعداد تخصیص‌ها کمتر از n است به روند نشانه‌گذاری یعنی گام ۵ بروید.

گام ۵: روند نشانه گذاری (علامت گذاری):

تعریف: هر خانه‌ای که در آن $\bar{c}_{ij}=0$ است ولی در آن خانه تخصیص صورت نگرفته و سطر i ام آن علامت‌گذاری شده است ولی ستون j ام آن علامت‌گذاری نشده است را، خانه قابل انتخاب می‌نامیم.

تا آنجا که ادامه نشانه‌گذاری میسر است این گام را اجرا کنید؛ یعنی:

الف. سطرهایی که تخصیص ندارند، برای آنها نشانه $+S$ که به معنی پایان اضافه شدن است را قرار دهید. حرف S حرف اول کلمه $Stop$ و + به معنی امکان اضافه شدن به فهرست خانه‌های دارای تخصیص است.

ب. اگر سطر k ام نشانه‌گذاری شده و $\overline{C}_{kt}$ قابل انتخاب است، آنگاه در ستون t ام نشان $+Rk$ را قرار دهید. R حرف اول کلمه Row به معنی سطر است.

ج. اگر ستون t ام نشانه‌گذاری شده است و در سطر u ام آن تخصیص صورت گرفته برای سطر u ام نشان $-Ct$ را قرار دهید. C حرف اول کلمه $Column$ به معنی ستون و $-$ به معنی امکان خارج شدن از فهرست خانه‌های دارای تخصیص (دارای مقدار یک) است.

گام ۶: ادامه نشانه‌گذاری میسر نیست:

الف. یک ستون بدون تخصیص نشانه‌گذاری شده است در این صورت گام ۷ (روند بهبود) را اجرا کنید.

ب. ستون بدون تخصیص نشانه‌گذاری نشده است. در این صورت گام ۸ (روند کاهش بیشتر) را اجرا کنید.

گام ۷: <u>روند بهبود</u>: از ستون بدون تخصیص که نشانه‌گذاری شده است، شروع کنید. فرض کنید ستون y ام تخصیص ندارد، ولی نشانه‌گذاری شده است و نشان آن $+Rz$ می‌باشد. در این صورت در سطر z ام ستون y ام یک تخصیص انجام دهید و سپس به نشان سطر z ام نگاه کنید. اگر نشان سطر z ام $-Ck$ بود، به ستون k ام سطر z ام بروید و تخصیص آن را حذف کنید. حال به نشان ستون k ام نگاه کنید. اگر علامت آن $+Rm$ بود، در سطر m ام در ستون k ام یک تخصیص انجام دهید. اکنون به نشان سطر m ام نگاه کنید و تخصیص تعیین شده در نشان آن را حذف کنید. این‌کار را آنقدر ادامه دهید تا به سطری که نشان $+S$ دارد برسید. در این مرحله به تعداد تخصیص‌ها یکی اضافه شده است. حال اگر تعداد تخصیص‌ها n است جواب فعلی جواب بهینه است، در غیر این صورت نشانه‌ها را پاک و با حفظ تخصیص‌ها به گام ۵ بروید.

گام ۸: <u>روند کاهش بیشتر</u>: روی اعداد سطرهایی که علامت‌گذاری نشده‌اند خط افقی و روی اعداد ستون‌هایی که علامت‌گذاری شده‌اند خط عمودی بکشید. با این کار کلیه صفرهای ماتریس $\overline{C}$ زیر خط افقی و یا عمودی قرار می‌گیرند و کلیه اعدادی که خطی آنها را نپوشانیده است، اعداد مثبت هستند. در بین این اعداد مثبت بدون پوشش، کوچکترین آنها را تعیین و آن را $\overline{C}_{ab}$ بنامید. حال همه اعداد بدون پوشش را به اندازه $\overline{C}_{ab}$ کاهش دهید و به همه اعدادی که در

تقاطع دو خط افقی و عمودی واقع شده‌اند مقدار $\overline{C}_{ab}$ را اضافه کنید. در نهایت خطوط رسم شده را پاک کنید و با حفظ علامت‌های قبلی برای ادامه نشانه‌گذاری برای صفرهای جدید به گام ۵ بروید.

مثال:

یک مسأله تخصیص ۶×۶ با ماتریس هزینه زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 14 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 \\ 5 & 7 & 9 & 11 & 3 & 1 \\ 8 & 10 & 12 & 14 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 12 & 14 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 \end{bmatrix}$$

پس از اجرای گام‌های ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ ماتریس زیر که در آن حرف @ در خانه ij به معنی $x_{ij}=1$ است به دست می‌آید.

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 0^{@} & 0 & 0 & 2 & 8 & 10 \\ 10 & 6 & 2 & 0^{@} & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 6 & 2 & 0^{@} \\ 4 & 4 & 4 & 6 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 6 & 0^{@} & 2 \\ 0 & 0^{@} & 0 & 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ C6- \\ S+ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ R4+ \end{matrix} & \end{array}$$

حال پس از اجرای گام ۸ ماتریس زیر حاصل می‌گردد.

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 0^{@} & 0 & 0 & 2 & 8 & 12 \\ 10 & 6 & 2 & 0^{@} & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 0 & 0^{@} \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 6 & 0^{@} & 4 \\ 0 & 0^{@} & 0 & 2 & 8 & 12 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ C6- \\ S+ \\ C5- \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ R3+R4+ \end{matrix} & \end{array}$$

اکنون اگر گام ۸ و سپس گامهای ۶ و ۷ را اجرا کنیم، ماتریس زیر نتیجه می‌شود.

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0^{@} & 0 & 0 & 2 & 10 & 14 \\ 10 & 6 & 2 & 0^{@} & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0^{@} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0^{@} \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 0^{@} & 4 \\ 0 & 0^{@} & 0 & 2 & 10 & 14 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ C6- \\ S+ \\ C5- \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} & & R3+ & & R3+ & R4+ \end{array} \end{array}$$

چون در آخرین ماتریس ۶ تخصیص انجام شده است، جواب آن یک جواب بهینه برای آخرین ماتریس و سایر ماتریس‌ها از جمله اولین ماتریس است.

یعنی جواب بهینه عبارتست از $1 \to 1$ و $2 \to 4$ و $3 \to 3$ و $4 \to 6$ و $5 \to 5$ و $6 \to 2$ با $Z^* = 32$ که عدد 32 جمع کل اعدادی است که از سطرها و ستون‌های ماتریس اولیه کم شده‌اند.

$$Z^* = 1+4+1+4+4+4+2+4+4+2+2 = 32$$

تمرین:

مسائل تخصیص زیر را یکبار با هدف حداکثر کردن درآمدها و یکبار با هدف حداقل کردن هزینه حل کنید.

$$C_1 = \begin{bmatrix} 14 & 8 & 0 & 9 \\ 3 & 2 & 9 & 4 \\ 2 & 6 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 8 \end{bmatrix} \text{ و } C_2 = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 0 & 5 \\ 14 & 12 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 70 & 80 & 65 & 65 & 0 \\ 65 & 80 & 80 & 85 & 0 \\ 75 & 80 & 75 & 80 & 0 \\ 70 & 75 & 70 & 80 & 0 \\ 60 & 70 & 80 & 70 & 0 \end{bmatrix}$$

۲-۴-۲- روش شاخه و کرانه

شاخه و کرانه در اصل یک استراتژی تقسیم و تسخیر است. ایده آن تقسیم ناحیه امکان ،در صورت نیاز، به زیر بخش‌های کوچکتر و تعیین کران برای هر یک از آن زیر بخش‌هاست.

در حالت کلی راه‌های زیادی برای تقسیم ناحیه امکان‌پذیر وجود دارد. یک برنامه خطی با اعداد صحیح نوعی از برنامه خطی است که شرط صحیح بودن نیز به آن اضافه شده است. بنابراین، در یک مسأله حداکثر کردن، مقدار تابع هدف در نقطه بهینه برنامه خطی همواره یک حد بالایی برای تابع هدف بهینه برنامه خطی با اعداد صحیح است. به علاوه هر نقطه امکان پذیر صحیح همواره یک حد پایینی برای مقدار بهینه تابع هدف برنامه خطی است.

در روش شاخه و کرانه ابتدا شرط صحیح بودن کنار گذارده می‌شود تا یک برنامه‌ریزی خطی به دست آید. روش حل یک برنامه‌ریزی خطی را در گذشته آموخته‌اید. با حل برنامه‌ریزی خطی، جواب‌های بهینه را به دست آورده و در شرایط و محدودیت‌های مسأله قرار داده و کنترل کنید. اگر شرایط صادق بود، جواب بهینه به دست آمده است، در غیر این صورت یک کران برای تابع هدف ایجاد شده است. به همین ترتیب می‌توان در جهت دستیابی به جواب بهینه با ایجاد شاخه و کرانه گام برداشت. با یک مثال این روش را بررسی می‌کنیم.

مثال:

یک مسأله تخصیص با ماتریس هزینه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} 17 & 12 & 15 & 8 & 10 \\ 10 & 14 & 8 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 9 & 11 & 13 & 11 & 9 \\ 7 & 13 & 19 & 25 & 30 \end{bmatrix}$$

برای حل، محدویت‌های یک به یک را کنار گذاشته به روش حداقل سطر و ستون عمل می‌کنیم:

در روش سطری جواب مسأله به این صورت به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} 17 & 12 & 15 & 8 & 10 \\ 10 & 14 & 8 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 9 & 11 & 13 & 11 & 9 \\ 7 & 13 & 19 & 25 & 30 \end{bmatrix} \quad z = 8+5+1+9+7 = 30$$

در روش ستونی جواب مسأله به این صورت به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} 17 & 12 & 15 & 8 & 10 \\ 10 & 14 & 8 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 9 & 11 & 13 & 11 & 9 \\ 7 & 13 & 19 & 25 & 30 \end{bmatrix} \quad z = 1+2+3+4+5 = 15$$

با در نظر گرفتن محدودیت‌ها مشاهده می‌شود که جواب‌های به دست آمده قابل قبول نیست. با توجه به این که در حل اولیه تعدادی از محدودیت‌ها را نادیده گرفته‌ایم، با افزودن محدودیت‌ها جوابی با مقدار $\bar{z}$ کمتر حاصل نخواهد شد در نتیجه یک حد پایینی برای $\bar{z}$ به دست خواهد آمد:

$$\bar{z} \geq \max\{30,15\} = 30$$

کار را با ایجاد شاخه ادامه می‌دهیم؛ برای این کار، کار A را به ترتیب به ماشین‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و۵ اختصاص می‌دهیم؛ اختصاص کار A به ماشین ۱ باعث حذف سطر و ستون اول ماتریس می‌شود که باید جواب بهینه آن را با کنار گذاردن محدودیت‌های مسأله به دست آوریم. بنابراین با حذف سطر و ستون اول داریم:

$$\begin{bmatrix} 14 & 8 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ 11 & 13 & 11 & 9 \\ 13 & 19 & 25 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{cases} z^* = 5+2+9+13 = 29 \rightarrow \bar{z} = 29 + \underline{17} = 46 \\ z^* = 2+3+4+5 = 14 \rightarrow \bar{z} = 14 + \underline{17} = 31 \end{cases}\right| \rightarrow$$

$$\rightarrow \bar{z}_{A\rightarrow 1} \geq \max\{46,31\} = 46$$

توجه کنید که هزینه ۱۷ از اختصاص کار A به ماشین ۱ به دست می‌آید.

اختصاص کار A به ماشین ۲:

$$\left.\begin{cases} z^* = 5+1+9+7 = 22 \rightarrow \bar{z} = 22 + \underline{12} = 34 \\ z^* = 13 \rightarrow \bar{z} = 13 + \underline{12} = 25 \end{cases}\right| \rightarrow$$

$$\rightarrow \bar{z}_{A\rightarrow 2} \geq \max\{34,25\} = 34$$

به همین ترتیب برای اختصاص کار A به ماشین‌های ۳و ۴و ۵ داریم:

$$\begin{cases} z^* = 37 \\ z^* = 37 \end{cases} \rightarrow \overline{z}_{A\rightarrow 3} \geq \max\{37,37\} = 37$$

$$\begin{cases} z^* = 30 \\ z^* = 19 \end{cases} \rightarrow \overline{z}_{A\rightarrow 4} \geq \max\{30,19\} = 30$$

$$\begin{cases} z^* = 33 \\ z^* = 20 \end{cases} \rightarrow \overline{z}_{A\rightarrow 5} \geq \max\{33,20\} = 33$$

دیده می‌شود که در این تخصیص‌ها جواب قابل قبول به دست نیامد، اما یک کران پایین برای مسأله به دست آمد. چون هدف حداقل کردن است، شاخه‌ای که حد پایین کمتری دارد را انتخاب می‌کنیم. این کار می‌تواند باعث شود تا برخی از شاخه‌ها خود به خود حذف شوند و زودتر به جواب بهینه برسیم.

بنا بر آنچه گفته شد، کار A را به ماشین ۴ تخصیص می‌دهیم. در این صورت سطر ۱ و ستون ۴ حذف شده و ماتریس ۴×۴ می‌شود.

سپس سعی می‌کنیم کار B را به ماشین‌های باقیمانده اختصاص دهیم. نتایج زیر به دست می‌آید:

$$\left| \begin{array}{l} \overline{z}_{B\rightarrow 1} \geq 42 \\ \overline{z}_{B\rightarrow 2} \geq 39 \\ \overline{z}_{B\rightarrow 3} \geq 33 \\ \overline{z}_{B\rightarrow 5} \geq 30 \end{array} \right.$$

با توجه به این که باز هم جواب قابل قبول به دست نیاوردیم، کار B به ماشین ۵ اختصاص داده می‌شود. با اختصاص کار C به ماشین‌ها داریم:

$$\left| \begin{array}{l} \overline{z}_{C\rightarrow 1} \geq 38 \\ \overline{z}_{C\rightarrow 2} = 35 \\ \overline{z}_{C\rightarrow 3} = 34 \end{array} \right.$$

با توجه به این که با اختصاص کار C به ماشین ۲ به یک جواب قابل قبول رسیده‌ایم، شاخه‌هایی که $\overline{z}$ آنها بیش از ۳۵ است، حذف می‌گردد.

در اختصاص کار C به ماشین ۳ نیز به جواب قابل قبول رسیدیم. در نتیجه شاخه‌های با $\overline{z}$ بزرگتر از ۳۴ را حذف می‌کنیم.

قاعده‌ای که برای حل این مسأله از آن استفاده شده است، قاعده بهترین حد[۱۷] نام دارد.

مثال برنامه‌ریزی با اعداد صحیح:

مسأله برنامه‌ریزی زیر را در نظر بگیرید:

$$\max \quad z = -x_1 + x_2 + 2x_3$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 10 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 40 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 30 \\ x_j = 0,1,\ldots \qquad j = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

برای حل مسأله، ابتدا فرض می‌کنیم شرط صحیح بودن متغیرها وجود ندارد و ما یک برنامه خطی را حل می‌کنیم:

پایه	مقدار	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
z	$130/3$	0	$10/3$	0	0	$5/6$	$1/3$
s_1	30	0	4	0	1	$1/2$	0
x_3	$70/3$	0	$7/3$	1	0	$1/3$	$1/3$
x_1	$10/3$	1	$1/3$	0	0	$-1/6$	$1/3$

با توجه به این که تابع هدف ما حداکثر کردن است $\bar{z}$ هیچگاه بزرگتر از مقدار $130/3$ نخواهد شد.

$$\bar{z} \le \frac{130}{3} = 43.3 \rightarrow \bar{z} \le 43$$

هر یک از متغیرهای تصمیم‌گیری که عدد صحیح نباشند، می‌توانند مبنای ایجاد شاخه قرار گیرند. با انتخاب x_1 دو شاخه ایجاد می‌شود:

$$\begin{cases} x_1 \le 3 \\ x_1 \ge 4 \end{cases}$$

[۱۷] Best Bound Rule

ابتدا یک شاخه را انتخاب کرده و بررسی می‌کنیم و بعد از اتمام شاخه، شاخه دیگری را بررسی می‌کنیم. با انتخاب شاخه $x_1 \le 3$ و تبدیل آن به محدودیت $x_1 + x_1' = 3$ خواهیم داشت $x_1 = 3 - x_1'$ که این تبدیل را در جدول بهینه اعمال می‌کنیم تا جدول بعدی حاصل شود.

پایه	مقدار	x_1'	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
z	$130/3$	0	$10/3$	0	0	$5/6$	$1/3$
s_1	30	0	4	0	1	$1/2$	0
x_3	$70/3$	0	$7/3$	1	0	$1/3$	$1/3$
x_1'	$1/3$	-1	$1/3$	0	0	$-1/6$	$1/3$

با ضرب طرفین محدودیت سوم در ۱- خواهیم داشت:

پایه	مقدار	x_1'	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
z	$130/3$	0	$10/3$	0	0	$5/6$	$1/3$
s_1	30	0	4	0	1	$1/2$	0
x_3	$70/3$	0	$7/3$	1	0	$1/3$	$1/3$
x_1'	$-1/3$	1	$-1/3$	0	0	$1/6$	$-1/3$

با انجام عملیات سیمپلکس همزاد به جدول زیر می‌رسیم:

پایه	مقدار	x_1'	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
z	43	0	3	0	0	1	0
s_1	30	0	4	0	1	$1/2$	0
x_3	23	1	2	1	0	$1/2$	0
s_3	1	-3	1	0	0	$-1/2$	1

با توجه به این که شرط بهینگی برقرار بوده و متغیرها نیز شرط صحیح بودن را دارا هستند جواب نهایی به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 23 \end{cases} \Rightarrow \bar{z} = 43$$

اگر شاخه دوم را به همین صورت بررسی کنیم خواهیم داشت:

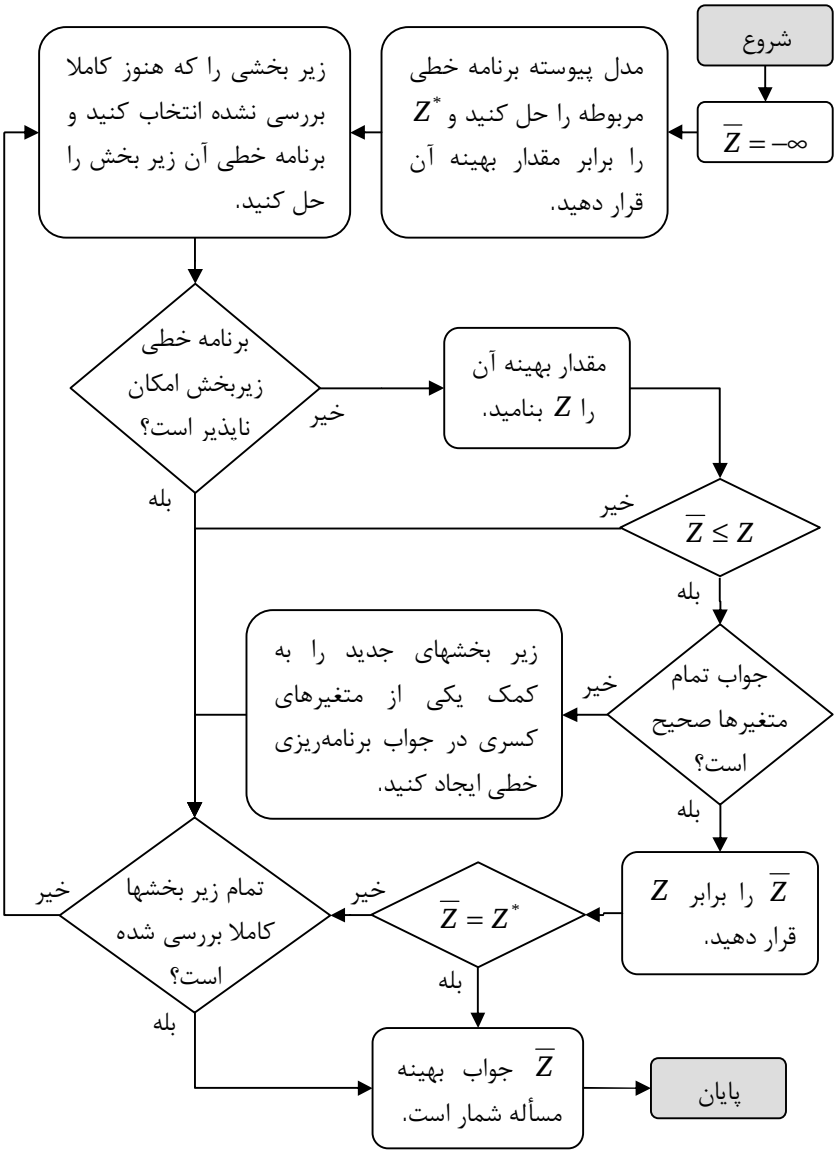
$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 22 \end{cases} \Rightarrow \bar{z} = 40$$

نکته: یک شاخه در سه صورت به کف رسیده و پایان می‌پذیرد:

۱. به جواب مطلوب برسیم.
۲. زیر شاخه تهی شود.
۳. در آن شاخه از درخت جوابی بهتر از آنچه تا کنون یافته‌ایم پیدا نشود.

از الگوریتم زیر می‌توان برای دستیابی به جواب استفاده کرد. در این الگوریتم فرض شده که تابع هدف مسأله باید حداکثر گردد. همچنین کل مسأله، اولین زیر بخش مورد بررسی است.

نکته: توجه کنید که همواره $\overline{Z} \le Z^*$


شروع
$\overline{Z} = -\infty$
مدل پیوسته برنامه خطی مربوطه را حل کنید و Z^* را برابر مقدار بهینه آن قرار دهید.
زیر بخشی را که هنوز کاملا بررسی نشده انتخاب کنید و برنامه خطی آن زیر بخش را حل کنید.
برنامه خطی زیربخش امکان نایذیر است؟
خیر
بله
مقدار بهینه آن را Z بنامید.
$\overline{Z} \le Z$
خیر
بله
جواب تمام متغیرها صحیح است؟
خیر
بله
زیر بخشهای جدید را به کمک یکی از متغیرهای کسری در جواب برنامه‌ریزی خطی ایجاد کنید.
$\overline{Z}$ را برابر Z قرار دهید.
$\overline{Z} = Z^*$
خیر
بله
تمام زیر بخشها کاملا بررسی شده است؟
خیر
بله
$\overline{Z}$ جواب بهینه مسأله شمار است.
پایان

۲-۴-۳- صفحات برش[۱۸]

الگوریتم صفحه برش با تغییر جواب‌های برنامه‌ریزی خطی، برنامه‌های با اعداد صحیح را تا حصول جواب صحیح، حل می‌کند. بر خلاف روش شاخه و کرانه، این روش ناحیه امکان‌پذیر را به زیر بخش‌ها تقسیم نمی‌کند؛ بلکه تنها با یک برنامه خطی کار می‌کند و با اضافه کردن محدودیت‌های جدید آن را اصلاح می‌کند. محدودیت‌های جدید هر بار ناحیه امکان پذیر را کوچکتر می‌نماید تا یک جواب بهینه صحیح پیدا شود. در عمل روش شاخه و کرانه تقریبا همیشه از الگوریتم صفحه برش بهتر عمل می‌کند. اما این روش در تحول برنامه‌ریزی با اعداد صحیح اهمیت داشته است و برای حل برخی از مسأله‌ها کاراتر می‌باشد.

از نظر تاریخی این اولین الگوریتمی بود که برای برنامه‌ریزی با اعداد صحیح توسعه یافت و همگرایی آن در تعداد محدودی گام قابل اثبات بود. علاوه بر آن اگر چه این الگوریتم کلا غیر کارا محسوب می‌شود، ولی شناختی از برنامه‌ریزی با اعداد صحیح فراهم آورده است که منجر به الگوریتم‌های دیگری با کارآیی بیشتر شده است.

۲-۴-۳-۱- روش برش کسری گموری[۱۹]

مطابق روش شاخه و کرانه محدودیت‌هایی را کنارگذاشته و مسأله را حل می‌کنیم. اگر جواب مطلوب نباشد با ایجاد یک برش نقطه بهینه به دست آمده و نقاط اطراف آن را کنار می‌گذاریم؛ بدین شرط که در ناحیه جدا شده، هیچ نقطه مطلوبی وجود نداشته باشد.

با استفاده از یک مثال روش را توضیح می‌دهیم:

$$\max \quad z = cx$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ x \in z \end{cases} \Rightarrow x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$$

اگر تمام عناصر بردار x^* عدد صحیح باشند، جواب مطلوب می‌باشد؛ ولی اگر متغیر x_j^* عدد صحیح نباشد، x^* نقطه مطلوب ما نمی‌باشد و باید به روش صفحه برش جواب مطلوب را بیابیم.

برای توضیح این روش یک مسأله فرضی را در نظر بگیرید. در اولین گام، با حل مسأله بدون در نظر گرفتن شرط صحیح بودن متغیرها، به جواب بهینه زیر می‌رسیم:

---

[۱۸] Cutting Planes

[۱۹] Gomory

پایه	مقدار	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3
z	**L**	0	3.5	0	1.2	4.8	15.7	0	10
x_3	5.7	0	–2.1	1	9.5	0	3	0	–6.3
s_2	4	0	0	0	–7.7	10.4	–8.1	1	0
x_1	3.8	1	6.1	0	0	–6	15.3	0	4.7

اگر جدول بهینه به صورت بالا باشد جواب حاصل به این صورت خواهد بود:

$$x^* = (3.8\,,0\,,5.7\,,0\,,0)$$

حال باید یک برش معرفی کنیم که این راس و نقاط اطراف آن را ببرد. برای این کار می‌توان از محدودیت اول یا سوم استفاده کرد. معادله اول را به این صورت می‌نویسیم:

$$-2.1x_2 + x_3 + 9.5x_4 + 3s_1 - 6.3s_3 = 5.7$$
$$-3x_2 + x_3 + 9x_4 + 3s_1 + 7s_3 - 5 = 0.7 - 0.9x_2 - 0.5x_4 - 0.7s_3$$

یعنی کلیه ضرایب و مقدار ثابت را به سمت پایین گرد کرده و به سمت چپ می‌بریم و مقادیر باقیمانده را به طرف دیگر می‌بریم. چون هر متغیر باید مقدار صحیح بگیرد در نتیجه سمت چپ و به تبع آن سمت راست نیز یک عدد صحیح خواهد بود. با توجه به این که متغیرها منفی نمی‌باشند در نتیجه در سمت راست از مقدار 0.7 مقادیری کسر می‌شود که سمت راست را مثبت نمی‌کند. در نتیجه داریم:

$$.7 - .9x_2 - .5x_4 - .7s_3 \le 0$$

پس در هر جواب مطلوب مقدار سمت راست آخرین معادله می‌تواند صفر یا منفی باشد.

اگر جواب به دست آمده را در این محدودیت قرار دهیم مقدار مثبتی به دست خواهد آمد که جواب دلخواه ما نیست. بنابراین چون متغیرهای پایه در سمت چپ قرار دارند، از معادله سمت راست جهت افزودن محدودیت به جدول استفاده می‌کنیم و سطر زیر را به جدول اضافه می‌کنیم:

پایه	مقدار	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	s_4

چون مقدار s_4 منفی می‌باشد، باید از پایه خارج شده و با تست نسبت همزاد، متغیر ورودی به پایه مشخص شود. بعد از انجام عملیات روش سیمپلکس همزاد تا رسیدن به جواب بهینه دلخواه این روش را

ادامه می‌دهیم. استراتژی اساسی در تکنیک صفحه برش، افزودن برش‌هایی به محدودیت‌هایی که ناحیه امکان پذیر را تعریف می‌کنند و سپس حل برنامه خطی حاصل است. اگر مقادیر بهینه برای متغیرهای تصمیم‌گیری در برنامه خطی همگی اعداد صحیح باشند، جواب بهینه است و در غیر این صورت یک برش جدید به دست می‌آید که باید به محدودیت‌ها افزوده شود.

۲-۴-۳-۲- روش برش تمام صحیح همزاد

فلسفه این روش این است که کار را با جدولی که تمام ضرایب و مقادیر آن عدد صحیح است، شروع کنیم و اگر چنین نباشد، باید با ضرب اعداد در معادلات آنها را صحیح کنیم. همچنین باید در طول انجام عملیات صحیح بودن جدول را حفظ کنیم.

در این روش از یک راس صحیح شروع کرده و مسأله را ادامه می‌دهیم تا به راس صحیح و بهینه برسیم. این روش هنگامی‌استفاده می‌شود که شرط تعلق را نداشته، ولی شرط بهینگی را داشته باشیم.

در هنگام چرخش لولا اگر عنصر چرخش لولایی ۱- باشد، جدول بعدی نیز تمام صحیح خواهد بود. اگر عنصر لولا ۱- نبود، باید برشی به جدول اولیه اضافه شود به گونه‌ای که ۱- را بتوان به عنوان عنصر لولا انتخاب کرد. سپس عملیات چرخش لولا انجام می‌شود.

با یک مثال این روش را نشان می‌دهیم:

$$\min \quad z = 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 2x_4$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 \geq 15 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 10 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 20 \\ x_j = 0,1,2,3,\mathbf{L} \qquad j = 1,2,3,4 \end{cases}$$

پایه	مقدار	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3
z	0	–5	–8	–3	–2	0	0	0
s_1	–15	–2	1	–4	–3	1	0	0
s_2	–10	1	–3	–1	–2	0	1	0
s_3	–20	–3	–2	3	–1	0	0	1

در اینجا شرط تعلق را نداریم ولی شرط بهینگی را داریم، پس روش سیمپلکس همزاد را در نظر می‌گیریم.

اگر در جدول فوق هر کدام از عنصرها را خروجی قرار دهیم، ۱- عدد لولا نخواهد شد. بنابراین باید به دنبال برشی بگردیم تا به وسیله آن به جواب مطلوب برسیم.

اگر s_3 را خروجی از پایه در نظر بگیریم، آنگاه عنصر لولا در جدول بالا ۳- می‌باشد. پس طرفین معادله مربوط را بر ۳ تقسیم می‌کنیم:

$$-3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + s_3 = -20 \xrightarrow{\div 3}$$
$$-x_1 - \frac{2}{3}x_2 + x_3 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}s_3 = \frac{-20}{3}$$

و حالا معادله اخیر را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$-x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 7 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}s_3 \le 0$$

با افزودن این محدودیت و ایزوله کردن جدول، سطر آخر به این صورت اضافه می‌شود.

پایه	مقدار	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	s_4
s_4	-7	-1	-1	1	-1	0	0	0	1

در جدول جدید عنصر چرخش لولا ۱- می‌باشد که در این حال شرط صحیح بودن به راحتی حفظ می‌گردد. پس از انجام عملیات چرخش لولایی، جدول زیر حاصل می‌گردد:

پایه	مقدار	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	s_4
z	14	-3	-6	-5	0	0	0	0	-2
s_1	6	1	4	-7	0	1	0	0	-3
s_2	4	3	-1	-3	0	0	1	0	-2
s_3	-13	-2	-1	2	0	0	0	1	-1
x_4	7	1	1	-1	1	0	0	0	-1

با انجام هر چرخش لولا سعی می‌کنیم شرط صحیح بودن را حفظ کنیم. این عمل را آنقدر تکرار می‌کنیم تا به جواب بهینه برسیم.

۲-۴-۳-۳- روش برش تمام صحیح اولیه

اصول و فلسفه این روش مانند روش تمام صحیح همزاد می‌باشد با این تفاوت که این روش هنگامی استفاده می‌شود که شرط بهینگی را نداشته، اما شرط تعلق را داشته باشیم. همچنین در این روش عنصر لولا باید ۱ باشد.

$$\max \quad z = 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 2x_4$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 15 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \le 10 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 \le 20 \\ x_j = 0,1,2,\mathbf{K} \qquad j = 1,2,3,4 \end{cases}$$

برای این مثال، در جدول اولیه شرط تعلق را داریم ولی شرط بهینگی را نداریم. چون عدد لولا ۱ نیست، پس یک برش ایجاد کرده و محدودیت جدید را اضافه کرده و ایزوله می‌کنیم.

پایه	مقدار	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3
z	0	–5	–8	–3	–2	0	0	0
s_1	15	2	–1	4	3	1	0	0
s_2	10	–1	3	1	2	0	1	0
s_3	20	3	–2	–3	1	0	0	1

اگر x_2 را ورودی به پایه فرض کنیم، عدد لولا ۳ می‌گردد:

$$-x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + s_2 = 10$$
$$-\frac{1}{3}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}s_2 = \frac{10}{3}$$
$$-x_1 + x_2 - 3 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}s_2$$
$$-x_1 + x_2 + s_4 = 3$$

با اعمال این برش جدول زیر را خواهیم داشت:

پایه	مقدار	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	s_4
z	24	–13	0	–3	–2	0	0	0	8
s_1	18	1	0	4	3	1	0	0	1
s_2	1	2	0	1	2	0	1	0	–3
s_3	14	5	0	–3	1	0	0	1	–2
x_2	3	–1	1	0	0	0	0	0	1

به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا به جواب بهینه دست یابیم.

۲-۴-۳-۴- برش مسأله‌های مختلط

اگر مسأله مختلط بود، برای مثال اگر $j=1,2$ $x_j = 0,1,2,\mathbf{K}$ و بقیه تنها قید غیر منفی بودن را داشتند، مانند قبل مسأله را پیوسته در نظر گرفته و حل می‌کنیم تا به جواب بهینه برسیم. سپس آن را با در نظر گرفتن محدودیت‌ها بررسی می‌کنیم. در صورتی که جواب بدست آمده در محدودیت‌ها صادق بود، به جواب بهینه رسیده‌ایم؛ در غیر این صورت باید برش انجام شود.

مثال:

بعد از حل بهینه به جوابی رسیده‌ایم که در آن، x_1 مقدار غیرصحیح را داراست. بنابراین محدودیت x_1 را برای آن به این صورت می‌نویسیم:

$$x_1 + 6.1x_2 - 6x_5 + 15.3s_1 + 4.7s_3 = 3.8$$
$$0.1x_2 - 6x_5 + 15.3s_1 + 4.7s_3 = (3 - x_1 - 6x_2) + 0.8$$

در داخل پرانتزها عبارتی داریم که مقدار ثابت آن صحیح است و در آن تنها متغیرهای صحیح با ضرایب صحیح آمده‌اند. بنابراین در هر جواب مطلوب مقدار آن عبارت عددی صحیح است. حال اگر:

$$3 - x_1 - 6x_2 \geq 0 \rightarrow 0.1x_2 - 6x_5 + 15.3s_1 + 4.7s_3 \geq 0.8$$

با حذف x_5 داریم:

$$0.1x_2 + 15.3s_1 + 4.7s_3 \geq 0.8$$

و اگر:

$$3 - x_1 - 6x_2 \leq -1 \rightarrow$$
$$0.1x_2 - 6x_5 + 15.3s_1 + 4.7s_3 \leq -0.2$$

با حذف همه متغیرها غیر از x_5 داریم:

$$-6x_5 \leq -0.2 \rightarrow 24x_5 \geq 0.8$$

با در نظر گرفتن دو رابطه فوق برش مورد نظر به دست می‌آید:

$$\left.\begin{cases} 0.1x_2 + 15.3s_1 + 4.7s_3 \geq .8 \\ -6x_5 \leq -.2 \rightarrow 24x_5 \geq .8 \end{cases}\right| \rightarrow$$

$$\rightarrow 0.1x_2 + 24x_5 + 15.3s_1 + 4.7s_3 \geq .8$$

توجه کنید که در اینجا ما دو نامعادله را با هم جمع نکردیم. چرا که هر دو نمی‌توانند با هم اتفاق بیافتند و اگر یکی اتفاق بیفتد دیگری اتفاق نخواهد افتاد.

۲-۴-۴- روش شمارشی

در روش شمارشی یک سری از جواب‌های امکان پذیر مسأله را به ترتیب خاصی مرتب کرده و برای بهینگی کنترل می‌کنیم.

۲-۴-۴-۱- ترتیب لغتنامه‌ای

ترتیب لغتنامه‌ای یک روش برای مرتب‌سازی یک سری داده است که می‌تواند به شکل برداری نیز باشد. برای مثال برای ترتیب‌بندی چند اسم می‌توان از این روش به این صورت استفاده کرد.

مثال:

برای مرتب‌سازی سری داده زیر به این ترتیب عمل می‌کنیم.

محمود، محمد، مسعود، سعید

ابتدا حروف اول را با هم مقایسه می‌کنیم، سعید در ابتدای لیست قرار می‌گیرد؛ اما بقیه در یک رده قرار دارند. بنابراین برای سه اسم باقیمانده از مقایسه حروف دوم استفاده می‌کنیم. در این مقایسه مسعود در مکان چهارم قرار می‌گیرد. حال برای مقایسه محمود و محمد حروف سوم را مقایسه می‌کنیم. اما حروف سوم با هم برابرند. بنابراین حرف چهارم آنها را با هم مقایسه می‌کنیم که در این ترتیب محمد در مکان دوم و محمود در مکان سوم قرار می‌گیرد؛ پس ترتیب مورد نظر به این صورت نتیجه می‌شود:

سعید - محمد - محمود - مسعود.

در این مبحث نیز ترتیب لغتنامه‌ای برای مرتب کردن بردارها به کار می‌رود. برای تعیین بردار کوچکتر باید مولفه‌های متناظر را از سمت چپ با هم مقایسه نموده و بردارها را مرتب کنیم. بردار $\vec{0}$ اگر موجود باشد همواره کوچکترین بردار می‌باشد.

مثال:

بردارهای زیر را با استفاده از ترتیب لغتنامه‌ای مرتب کنید.

$$\vec{A}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\quad \vec{B}=\begin{bmatrix}0\\2\\4\end{bmatrix}\quad \vec{C}=\begin{bmatrix}1\\0\\5\end{bmatrix}\quad \vec{D}=\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}$$

مولفه‌های اول را با هم مقایسه می‌کنیم و می‌بینیم که در $\vec{B}$ و $\vec{D}$ مولفه اول، 0 است. بنابراین، این دو بردار از بقیه کوچکترند. سپس به سراغ مولفه‌های دوم این دو بردار می‌رویم و از آنجا که مولفه‌های دوم این دو بردار با هم برابرند، مولفه‌های سوم را مقایسه می‌کنیم. با مقایسه مولفه‌های سوم، بردار کوچکتر $\vec{D}$ در ابتدا قرار می‌گیرد و بردار $\vec{B}$ در ردیف دوم مرتب می‌شود. برای مقایسه بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{C}$، از آنجا که مولفه اول هر دو بردار برابر1 است به سراغ مولفه دوم می‌رویم و در نتیجه بردار $\vec{C}$ از بردار $\vec{A}$ کوچکتر شناخته می‌شود، پس چهار بردار فوق به ترتیب لغتنامه‌ای به شکل زیر مرتب می‌شوند:

$$\vec{D} \to \vec{B} \to \vec{C} \to \vec{A} \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0\\2\\4\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1\\0\\5\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

۲-۴-۴-۲- روش شمارش کامل

یک راه حل برای مسأله‌هایی که دارای متغیرهای صحیح هستند، روش شمارش کامل است. بدین معنی که کلیه ترتیبات ممکن متغیرها را فهرست کرده و بهترین آنها را که امکان پذیر باشد، انتخاب می‌کنیم. این شیوه برای مسأله‌های کوچکی که تنها چند متغیر دارند، خیلی خوب کار می‌کند.

اگر مسأله ما به صورت کلی زیر باشد:

$$\min \quad f(x)$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} g_i(x) \ge b_i \\ x \in S,\ S = \{x \mid 0 \le x \le u\ , x \in z\} \end{cases}$$

یک راه ساده اینست که نقاطی که مختصات صحیح دارند را در نظر بگیریم و تک تک این نقاط را بررسی کنیم تا بهترین جواب مشخص شود. حلقه زیر تمام نقاط با مختصات صحیح در مجموعه S (ابر مکعب مستطیل $0 \le x \le u$) را با ترتیب لغتنامه‌ای تولید می‌کند.

$$DO \quad x_1 = 0\ to\ u_1$$
$$DO \quad x_2 = 0\ to\ u_2$$
$$\mathbf{O}$$
$$DO \quad x_n = 0\ to\ u_n$$

اگر همه نقاط در مجموعه S را تک تک بررسی کنیم، شمارش کامل انجام شده است.

۲-۴-۴-۳- روش شمارش جزیی یا ضمنی[۲۰]

[۲۰] Implicit Enumeration

در روش شمارش کامل، همه نقاط در مجموعه S را بررسی می‌کنیم. در روش شمارش جزیی سعی می‌کنیم تعداد نقاط مورد بررسی را کاهش دهیم، به طوری که در نهایت جواب بهینه به دست آید. در توابعی که غیر کاهشی یکنوا باشند، یعنی اگر:

$$\forall x' \in S, \forall x'' \in S, x' \geq x'' \rightarrow f(x') \geq f(x'')$$

باشد، می‌توان از این روش استفاده کرد. ممکن است یک تابع پیوسته، غیر کاهشی نباشد، ولی به صورت گسسته، غیر کاهشی یکنوا باشد. برای مثال تابع $f(x) = x^2 - x$ به صورت پیوسته تابعی غیر کاهشی نیست. زیرا داریم: $f(0) = 0$ و $f(1/2) = -1/4$ و $f(1) = 0$. ولی این تابع غیر کاهشی یکنوای گسسته است.

حال فرض کنید توابع مورد نظر f و g توابعی غیر کاهشی باشند. در روش شمارش کامل بردارهایی که باید در نظر بگیریم چنین می‌باشند:

$$x^1 = (0,0,\mathbf{K},0) = 0, x^2 = (0,0,\mathbf{K},0,1), \mathbf{K}, x^n = (0,0,\mathbf{K},u_N)$$
$$x^{n+1} = (0,0,\mathbf{K},0,1,0), \mathbf{K}, x^N = (u_1,u_2,\mathbf{K},u_n) = \overset{\mathbf{r}}{U}$$

تعداد بردارهای موجود برابراست با:

$$N = \prod_{j=1}^{n} (u_j + 1)$$

بردارهای فوق دارای ترتیب لغتنامه‌ای می‌باشند، یعنی $x^1 = 0$ را اولین بردار و x^N را آخرین بردار می‌دانیم و بقیه نیز دارای ترتیب می‌باشند. این ترتیب یک ترتیب یگانه می‌باشد و ترتیب دیگری برای آنها نمی‌توانیم در نظر بگیریم. برای هر بردار x یک بردار x' بدین ترتیب تعریف می‌کنیم:

$$x = x^k \Rightarrow x' = \begin{cases} x^{k+1} & \text{if } x^k \neq u \\ \text{Does not exist} & \text{if } x^k = u \end{cases}$$

و نیز برای هر بردار x یک بردار $x^@$ تعریف می‌کنیم. $x^@$ بزرگترین بردار در ترتیب لغتنامه‌ای بردارها است، مشروط بر این که کلیه بردارهای بین x و $x^@$ در ترتیب لغتنامه‌ای، ترتیب جزیی را هم داشته باشند. یعنی:

$$\forall y, \quad x \overset{L}{\le} y \overset{L}{\le} x^{@} \quad \to x \le y \le x^{@}$$ [۲۱]

$$x \le y \to \begin{cases} x_1 \le y_1 \\ x_2 \le y_2 \\ \quad \vdots \\ x_n \le y_n \end{cases}, x = (x_1, x_2, ..., x_n) \to x^{@} = (x_1, x_2, ..., u_k, ..., u_n)$$

اگر $x = 0$ آنگاه $x^{@} = u$. در غیر این صورت برای به دست آوردن $x^{@}$ از سمت راست شروع کرده و اولین عنصر غیر صفر را جستجو می‌کنیم.

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n), \quad x_k \ne 0, x_{k+1}, ..., x_n = 0$$

در مثال بالا اولین عنصر غیر صفر x_k است، بنابراین در $x^{@}$، x_k و سمت راست آن را برابر حد بالا قرار داده و x_1 تا x_{k-1} را برابر مقادیر خودشان قرار می‌دهیم. به عنوان مثال:

$$x = (0,0,0,...,1) \Rightarrow x^{@} = (0,0,0,...,u_n)$$
$$x = (0,5,0...,1,1,0,0) \Rightarrow x^{@} = (0,5,0,...,1,u_{n-2}, u_{n-1}, u_n)$$

برای هر x یک بردار $x^{\#}$ هم تعریف می‌شود:

$$x^{\#} = \begin{cases} \left(x^{@}\right)' & \text{if } x^{@} \ne u \\ \text{Does not exist if } x^{@} = u \end{cases}$$

بردار $x^{\#}$ اولین بردار پس از $x^{@}$ در ترتیب لغتنامه‌ای است که ممکن است وجود نداشته باشد. برای به دست آوردن بردار $x^{\#}$ از سمت راست یعنی آخرین مولفه بردار x شروع می‌کنیم و به دنبال اولین عنصر غیر صفر می‌گردیم. به عنوان مثال اگر x_j اولین عنصر غیر صفر باشد، عنصر قبل از آن یعنی x_{j-1} را بررسی می‌کنیم. اگر x_{j-1} در حد بالای خود بود، به سراغ x_{j-2} می‌رویم و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا اولین x_k پیدا شود که در حد بالایش نباشد. به این x_k عدد 1 را اضافه می‌کنیم. سپس همه مقادیر سمت راست را صفر قرار می‌دهیم و مقادیر سمت چپ را به همان صورت باقی می‌گذاریم. اگر همه x های قبل از x_j در حد بالای خود بود، بردار $x^{\#}$ وجود ندارد.

مثال:

[۲۱] L=Lexicographic

اگر $0 \le x \le (3,2,1,3,2)$ باشد، ابتدا N را محاسبه می‌کنیم.

$$N = \prod_{j=1}^{5} (u_j + 1) = 4 \times 3 \times 2 \times 4 \times 3 = 288$$

یعنی در کل ۲۸۸ نقطه داریم که باید کنترل شوند. در زیر برای برخی xها x'، $x^{@}$ و $x^{\#}$ آمده است. برای به دست آوردن بردار x' عدد1 را به صورت عددی با بردار x مربوط جمع می‌کنیم. (سیستم چرتکه‌ای)

x	x'	$x^{@}$	$x^{\#}$
0	$(0,0,0,0,1)$	$u = x^N$	وجود ندارد
$(0,0,0,0,1)$	$(0,0,0,0,2)$	$(0,0,0,0,2)$	$(0,0,0,1,0)$
$(0,1,0,0,0)$	$(0,1,0,0,1)$	$(0,2,1,3,2)$	$(1,0,0,0,0)$
$(1,2,1,3,0)$	$(1,2,1,3,1)$	$(1,2,1,3,2)$	$(2,0,0,0,0)$

با شروع از $x = 0$ باید کنترل کنیم که آیا $g_i(x^{@}) \ge b_i \;,\; i = 1,\dots,m$ صادق است یا نه ؟

اگر این شرط برقرار باشد گوییم نقطه‌ای بین x و $x^{@}$ وجود دارد که درمحدودیت‌ها صادق است؛ و اگر این شرط برای محدودیتی صادق نباشد، آنگاه بین x و $x^{@}$ نقطه‌ای وجود ندارد که در آن محدودیت صادق باشد. دلیل این امر اینست که:

$$x \overset{L}{\le} y \overset{L}{\le} x^{@} \rightarrow x \le y \le x^{@} \rightarrow g_i(x) \le g_i(y) \le g_i(x^{@}) < b_i$$

پس هیچ بردار yای وجود ندارد که در آن محدودیت صادق باشد و این بدین معنی است که ما به طور ضمنی تمام نقاط بین x و $x^{@}$ را کنترل کرده‌ایم. اگر شرایط فوق برقرار باشد، برای $x^{\#}$ اگر موجود باشد، همین عمل را انجام می‌دهیم. اگر $f(x)$ تابع غیر کاهشی نباشد و آن را بتوانیم به وسیله تفاضل دو تابع غیرکاهشی بنویسیم:

$$\min \quad f(x) = f_1(x) - f_2(x)$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} g_i(x) \ge b_i \;\; i = 1,\dots,m \\ 0 \le x \le u \end{cases}$$

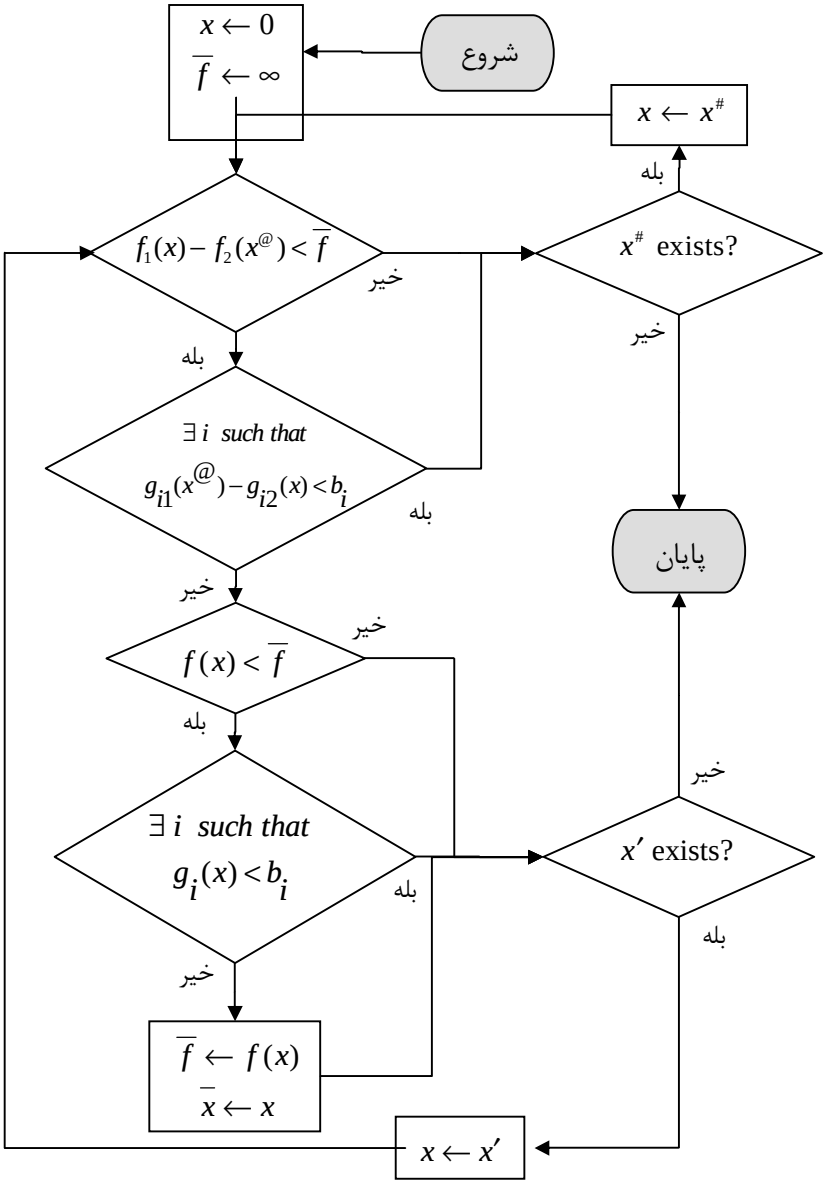
همچنین برای $g_i(x)$ها هم، اگر توابعی غیر کاهشی نباشند ولی بتوانیم آنها را به صورت تفاضل دو تابع غیرکاهشی $g_{i1}(x)$ و $g_{i2}(x)$ بنویسیم؛ امکان شمارش ضمنی وجود دارد.

$$g_i(x) = g_{i1}(x) - g_{i2}(x) \ge b_i$$

برای این کار، حد بالای تابع $g_i(x)$ را $g_{i1}(x^{@})-g_{i2}(x)$ قرار می‌دهیم؛ چون اگر تمام $g_i(y)$ها را محاسبه کنیم، هیچیک از مقدار فوق بزرگتر نمی‌شود.

اگر $g_{i1}(x^{@})-g_{i2}(x)\geq b_i$ صادق باشد، ممکن است بین x و $x^{@}$ جوابی وجود داشته باشد. ولی اگر صادق نباشد، نقطه‌ای بین x و $x^{@}$ وجود ندارد که در این محدودیت صادق باشد؛ بنابراین به سراغ $x^{\#}$ می‌رویم.

الگوریتم روش حل به صورت زیر است:



مثال:

$$\min \quad f(x) = x_1^2 + 3^{x_2} + 2^{x_3}$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \geq 10 \\ x_2^2 - x_3^3 \geq 15 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \geq 20 \\ x_1 = 0,1,\mathbf{K},5 \\ x_2 = 0,1,\mathbf{K},7 \\ x_3 = 0,1,\mathbf{K},4 \end{cases}$$

در این مثال محدودیت‌های دوم و سوم به صورت یک تابع یکنوای غیرکاهشی نیستند. اما به صورت تفاضل دو تابع غیر کاهشی قابل نمایش می‌باشند

$$\min \quad f(x) = x_1^2 + 3^{x_2} + 2^{x_3}$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \geq 10 \\ (x_2^2) - (x_3^3) \geq 15 \\ (2x_1 + 5x_3) - (3x_2) \geq 20 \\ x_1 = 0,1,\mathbf{K},5 \\ x_2 = 0,1,\mathbf{K},7 \\ x_3 = 0,1,\mathbf{K},4 \end{cases}$$

$$x = 0 \rightarrow x^{@} = U$$

محدودیت اول را در نقطه $x^{@}$ محاسبه می‌کنیم و داریم:

$$5^2 + 7^2 \geq 10$$

که در نتیجه محدودیت اول برقرار می‌باشد. برای محدودیت دوم x_2 را از $x^{@}$ و x_3 را از x قرار می‌دهیم:

$$7^2 - 0 \geq 10$$

برای محدودیت سوم نیز مانند محدودیت دوم عمل می‌کنیم.

اگر بخواهیم $x^{@}$ را برای بردار $x' = [0 \quad 0 \quad 1]$ به دست آوریم، از x_n شروع می‌کنیم و مقدار x_n را مقدار $x^{@}$ قرار می‌دهیم و بقیه x را همان مقدار بردار قرار می‌دهیم:

$$x' = [0 \quad 0 \quad 1] \rightarrow x^{@} = [0 \quad 0 \quad 4]$$

اگر بردار اول x' در محدودیت اول صادق نباشد، هیچکدام از بردارهای بین $[1 \quad 0 \quad 0]$ و $[4 \quad 0 \quad 0]$ در بردار صادق نخواهند بود:

$$\begin{aligned} x' = [0 \quad 0 \quad 1] &\rightarrow x^{@} = [0 \quad 0 \quad 4] \\ &\rightarrow x^{\#} = [0 \quad 1 \quad 0] = x \\ &\rightarrow x^{@} = [0 \quad 7 \quad 4] \end{aligned}$$

و بردار $x^{@} = [0 \quad 7 \quad 4]$ هم در محدودیت سوم صدق نمی‌کند:

$$\begin{aligned} &0 + 49 \geq 10 \\ &49 - 0 \geq 15 \\ &0 + 20 - 3 = 17 < 20 \end{aligned}$$

در نتیجه بردارهای بین این دو هم درمحدودیت‌ها صدق نخواهد کرد و شمارش شده‌اند.

$$\begin{aligned} x^{@} &= [0 \quad 7 \quad 4] \\ &\rightarrow x^{\#} = [1 \quad 0 \quad 0] = x \\ &\rightarrow x^{@} = [5 \quad 7 \quad 4] \end{aligned}$$

و به همین ترتیب شمارش را ادامه می‌دهیم.

xهای بعدی به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} x &= [1 \quad 0 \quad 1] \quad , \quad x^{@} = [1 \quad 0 \quad 4] \\ x^{\#} = x &= [1 \quad 1 \quad 0] \quad , \quad x^{@} = [1 \quad 7 \quad 4] \\ x^{\#} = x &= [2 \quad 0 \quad 0] \quad , \quad x^{@} = [5 \quad 7 \quad 4] \\ x &= [2 \quad 0 \quad 1] \quad , \quad x^{@} = [2 \quad 0 \quad 4] \\ x^{\#} &= [2 \quad 1 \quad 0] \quad , \quad x^{@} = [2 \quad 7 \quad 4] \end{aligned}$$

نکته: در حل یک مسأله به روش شمارش ضمنی ترتیب متغیرها میتواند در زمان حل آن مسأله تاثیر داشنه باشد.

تمرین:

۱- بودجه‌بندی سرمایه: دو سرمایه‌گذاری با فرآیندهای مالی متفاوت، بر حسب هزار دلار در جدول نشان داده شده‌اند. در زمان ۰ ۱۰۰۰۰ دلار برای سرمایه گذاری موجود است و در زمان ۱، ۷۰۰۰ دلار. با فرض اینکه نرخ بازگشت سالانه برابر با $r = 0.1$ است، یک مدل LP تنظیم کنید که پاسخ آن مقدار "ارزش فعلی خالص[۲۲] به دست آمدع از این سرمایه‌گذاری‌ها را ماکزیمم کند.

	زمان			
	۰	۱	۲	۳
سرمایه‌گذاری ۱	-۶	-۵	+۷	+۹
سرمایه‌گذاری ۲	-۸	-۳	+۹	+۷

۲- زمان‌بندی چند دوره‌ای:[۲۳] یک شرکت بیمه در طی شش ماه آینده به تعداد زیر رایانه نیاز دارد:

ماه	فروردین	اردیبهشت	خرداد	تیر	مرداد	شهریور
تعداد	۹	۵	۷	۹	۱۰	۵

می‌توان رایانه‌ها را برای دوره‌های یک، دو و سه ماهه به ترتیب با قیمت ماهیانه ۲۰۰ دلار، ۳۵۰ دلار و ۴۵۰ دلار اجاره کرد. یک مساله LP فرمول‌بندی کنید به نحوی که هزینه اجاره حداقل گردد.

۳- تعداد شش شهر در یک کشور وجود دارد. این کشور باید مشخص کند که ایستگاه‌های آتش‌نشانی کجا ساخته شوند به نحوی که در هر شهر حداقل یکی از ایستگاه‌های آتش‌نشانی در فاصله ۱۵ دقیقه‌ای هر شهر باشد. زمان لازم برای جابه‌جایی پین شهرها در جدول زیر آورده شده است:

---

[۲۲] Net Present Value

[۲۳] Multi Period Work Scheduling

شهر ۲	۱۰				
شهر ۳	۲۰	۲۵			
شهر ۴	۳۰	۳۵	۱۵		
شهر ۵	۳۰	۲۰	۳۰	۱۵	
شهر ۶	۲۰	۱۰	۲۰	۲۵	۱۴
	شهر ۱	شهر ۲	شهر ۳	شهر ۴	شهر ۵

یک مدل IP فرمول‌بندی کنید که تعداد و مکان‌های ایستگاه‌های آتش‌نشانی را مشخص کند.

۴- یک شرکت چسب سازی سه نوع متفاوت از چسب را در دو خط تولید متفاوت، تولید می‌کند. هر خط تولید می‌تواند حداکثر ۷ کارگر را به کار گیرد. کارگرانی که در خط تولید شماره یک به کار گرفته شوند، ۵۰۰ دلار در هفته و کارگرانی که در خط تولید شماره دو به کار گرفته شوند، ۹۰۰ دلار در هفته حقوق دریافت خواهند کرد. برای یک هفته کاری، تنظیم خط یک ۱۰۰۰ دلار و خط دو ۲۰۰۰ دلار هزینه دارد و هر یک از کارگران به مقدار نشان داده شده در جدول زیر چسب تولید خواهد کرد:

	چسب ۱	چسب ۲	چسب ۳
خط تولید ۱	۲۰	۳۰	۴۰
خط تولید ۲	۵۰	۳۵	۴۵

با توجه به اینکه در هر هفته ۱۲۰ واحد از چسب شماره یک، ۱۵۰ واحد از چسب شماره ۲ و ۲۰۰ واحد از چسب شماره ۳ باید تولید شود؛ یک مدل IP فرمول‌بندی کنید که هزینه هفتگی را بهینه کند.

۵- جواب بهینه ماتریسهای هزینه زیر را با روش مجارستانی به دست آورید:

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 & 2 & 2 \\ 8 & 9 & 10 & 7 & 5 \\ 10 & 12 & 11 & 13 & 8 \\ 7 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 8 & 10 & 7 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 & 6 \\ 7 & 9 & 10 & 8 & 5 \\ 10 & 12 & 11 & 3 & 8 \\ 7 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 8 & 3 & 5 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

۶- جواب بهینه ماتریس زیر را با روش مجارستانی یک بار با فرض هزینه ودیگر بار به عنوان سود بدست آورید:

$$\begin{pmatrix} 14 & 8 & 0 & 9 \\ 3 & 2 & 9 & 4 \\ 2 & 6 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

۷- مسئله IP زیر را با روش شاخه کرانه حل کنید. برای حل هر زیرمسئله می‌توانید از هر روش دلخواه یا نرم‌افزار استفاده کنید.

$$\max \ z = 8x_1 + 5x_2$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 5x_2 \le 6 \\ 9x_1 + 5x_2 \le 45 \\ x_i \ge 0 \quad x_1, x_2 \in ¢ \end{cases}$$

۸- مسئله تخصیص زیر (سود) را با روش شاخه و کرانه حل کنید.

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 & 3 \\ 10 & 15 & 20 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 8 & 12 & 16 & 4 \end{pmatrix}$$

۹- در یک مدل برنامه ریزی خطی متغیرهای ۱ و ۲ و ۳ صحیح هستند. اگر در جدول بهینه پیوسته محدودیتی که در آن متغیر پایه است به صورت زیر باشد برش مربوط به این محدودیت را به دست آورید:

$$-2x_2 + x_3 + \frac{7}{3}x_4 - 2x_5 + \frac{9}{4}x_6 = \frac{17}{5}$$

۱۰- برای برنامه IP زیر برش مربوط به محدودیت اول را در جدول وارد کنید.(همه متغیرها صحیح هستند).

پایه	مقدار	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
z	L	2	0	0	1	3
x_3	$17/3$	-3.5	0	1	1.5	0.25
x_4	1.6	$5/3$	1	0	-1.5	1

(جواب بهینه)

۱۱- مسئله زیر را با روش شمارش ضمنی حل کنید

$$\min \quad z = 5x_1^3 + 2x_2^2 + 3x + 10$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \geq 10 \\ x_2^2 + x_3^2 \geq 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10 \\ x_i = 0,1,3 \qquad i = 1,2,3 \end{cases}$$

فصل سوم - برنامه‌ریزی پویا

۳-۱- مقدمه

برنامه‌ریزی پویا یک شیوه بهینه‌سازی است که مسأله‌های پیچیده را به دنباله‌ای از مسأله‌های ساده تبدیل می‌کند. مشخصه اصلی آن در ماهیت چند مرحله‌ای این روش بهینه‌سازی است. برنامه‌ریزی پویا یک چارچوب کلی برای تجزیه و تحلیل خیلی از مسأله‌ها ارائه می‌دهد. در این چارچوب روش‌های گوناگونی از بهینه‌سازی برای حل صور مختلف مسأله‌ها قابل به کارگیری می‌باشد.

در این روش ابتدا باید مرحله‌های یک مسأله را تعریف کنیم. به عبارت دیگر باید مسأله را به دنباله‌ای از مسائل ساده‌تر تجزیه کنیم. پس از تعریف مرحله‌ها باید در نظر داشته باشیم که هر مرحله ممکن است از یک یا چند حالت تشکیل شده باشد.

۳-۲- اصل بهینگی

هر سیاست بهینه دارای این خاصیت است که حالت فعلی هر چه که باشد، باقیمانده تصمیمات باید بهینه باشند.

در مسأله‌های برنامه‌ریزی پویا، هر مسأله را می‌توان به صورت یک شبکه در ذهن مجسم کرد، که در آن اگر تابع هدف به صورت حداکثر باشد، به دنبال طولانی‌ترین مسیر و اگر تابع هدف به صورت حداقل باشد، کوتاهترین مسیر بین دو یا چند گره را می‌جوییم. اصل بهینگی گویای این نکته است که هرگاه در یک گره باشیم، باید باقیمانده تصمیمات بهینه باشد؛ تا مسیر تعیین شده بهینه باقی بماند و گره در مسیر بهینه قرار گیرد. اگر حتی در یک قدم، تصمیم غیر بهینه بگیریم، سیاست، سیاستی بهینه نخواهد بود.

در این روش، می‌توانیم حرکت خود را از مرحله اول و یا از مرحله آخر شروع کنیم. اگر حرکت از مرحله اول شروع شود، به آن حرکت پیشرو و اگر از آخرین مرحله شروع شود، به آن حرکت پسرو می‌گوییم.

حرکت پسرو برای تمام مسأله‌ها، قابل استفاده است، اما حرکت پیشرو برای مسأله‌های احتمالی به کار نمی‌رود.

۳-۳- ویژگی‌های اصلی برنامه‌ریزی پویا

۱. هر مسأله را می‌توان به n مرحله تقسیم کرد و در هر مرحله باید یک تصمیم گرفته شود. به عبارت دیگر مسأله عبارتست از دنباله‌ای از تصمیمات مرتبط با یکدیگر.

۲. هر مرحله تعدادی حالت دارد. بطور کلی حالات عبارتند از وضعیتی که ممکن است سیستم در آن مرحله داشته باشد. در تعیین حالت برای یک مسأله، جواب به دو سوال می‌تواند مفید باشد:

الف) چه چیزی مرحله‌ها را به هم مرتبط می‌کند؟

ب) به چه اطلاعاتی نیاز است تا بتوان تصمیم مجاز را انتخاب کرد؛ بدون این که تصمیمات قبلی مشخص شده باشند.

۳. در هر حالت از هر مرحله با اتخاذ یک تصمیم حالت مرحله فعلی به حالتی در مرحله دیگر انتقال می‌یابد.
۴. این روش حل به‌گونه‌ای طراحی شده است که جواب بهینه مسأله اصلی را با تعیین سیاست بهینه هر حالت از هر مرحله بیابد. یعنی اینکه تصمیم بهینه در یک مرحله خاص بستگی به حالت آن مرحله دارد نه اینکه چگونه به آن حالت رسیده‌ایم. این به اصل بهینگی برای برنامه‌ریزی پویا معروف است.
۵. با فرض معلوم بودن حالت در هر مرحله، سیاست بهینه در مورد مرحله‌های باقیمانده، مستقل از سیاستی است که در مرحله‌های قبلی اتخاذ شده است.
۶. حل این نوع از مسأله‌ها با پیدا کردن جواب بهینه مربوط به کلیه حالت‌های مرحله آخر در حرکت پسرو و مرحله اول در حرکت پیشرو آغاز می‌گردد.
۷. سیاست بهینه هر حالت از هر مرحله را می‌توان با یک رابطه برگشتی و با فرض معلوم بودن سیاست بهینه تمام حالت‌های مرحله بعدی در حرکت پسرو و مرحله قبلی در حرکت پیشرو مشخص ساخت.
۸. با بکارگیری این رابطه برگشتی، حل از آخرین (اولین) مرحله شروع میگردد و مرحله به مرحله به عقب (جلو) میرود تا مرحله اول (آخر) نیز حل گردد. این کار به یافتن جواب بهینه برای کل مسأله منتهی می‌شود.

۳-۴- حرکت پسرو و پیشرو و مرحله و حالت

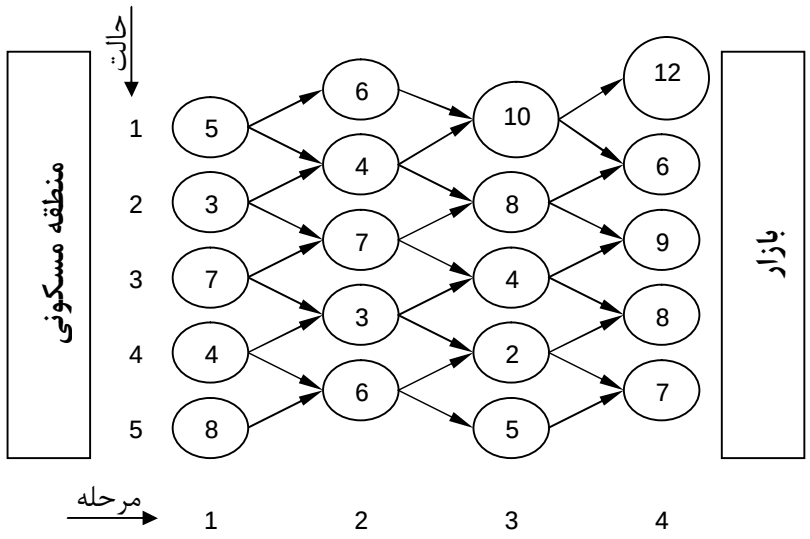
برای حل هر مسأله خاص، مرحله‌های خاص خودش را تعریف می‌کنیم؛ مثلا برای مسأله‌هایی که به زمان بستگی دارند، می‌توان واحد زمان را مرحله در نظر گرفت و در مسأله‌هایی که مکان مطرح است، هر مکان را می‌توان یک مرحله در نظر گرفت.

مثال:

قسمتی از یک شهر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم برای خرید از منطقه مسکونی به بازار برویم، به صورتی که در کمترین زمان به محل مورد نظر برسیم. در شکل زیر این مسأله نشان داده شده است. دایره‌ها به منزله تقاطع‌ها می‌باشند و اعداد، زمانی است که در هر تقاطع تلف می‌شود. گام ابتدا تعیین مرحله‌ها و حالت‌ها و متغیرهای تصمیم‌گیری می‌باشد.

مرحله: هر ستون را یک مرحله در نظر می‌گیریم.

حالت: هر تقاطع در هر ستون را یک حالت می‌نامیم.



با توجه به این که مسأله قطعی است، حرکات پسرو و پیشرو، هر دو، کاربرد دارند. در اینجا هر دو حرکت را نشان می‌دهیم:

الف) حرکت پسرو

در حرکت پسرو، حرکت را از مرحله آخر شروع می‌کنیم و به سوی مرحله اول می‌رویم. در هر مرحله حداقل زمان ممکن برای رسیدن به تمام حالتهای آن مرحله را به دست می‌آوریم و پس از رسیدن به مرحله اول با توجه به مسیری که حداقل زمان را نتیجه داده است، جواب بهینه را تعیین می‌کنیم.

حرکت را از مرحله چهارم شروع می‌کنیم و به سوی مرحله اول حرکت می‌کنیم. در مرحله چهارم مقدار زمان توقف در هر یک از ۵ تقاطع به ترتیب ۱۲ و ۶ و ۹ و ۸ و ۷ می‌باشد. درگام بعدی برای رفتن به مرحله ۳ باید کمترین زمان ممکن برای رسیدن به مقصد را به این صورت به دست آوریم:

$$16 = \min\{(10+12),(10+6)\}$$
$$14 = \min\{(8+6),(8+9)\}$$
$$12 = \min\{(4+9),(4+8)\}$$
$$9 = \min\{(2+8),(2+7)\}$$
$$12 = \min\{(5+7)\}$$

به عنوان مثال در رابطه اول، برای رسیدن به حالت ۱ در مرحله سوم، دو مسیر یکی از حالت ۱ مرحله چهارم به حالت ۱ مرحله سوم و دیگری از حالت ۲ مرحله چهارم به حالت ۱ مرحله سوم با هم مقایسه شده‌اند.

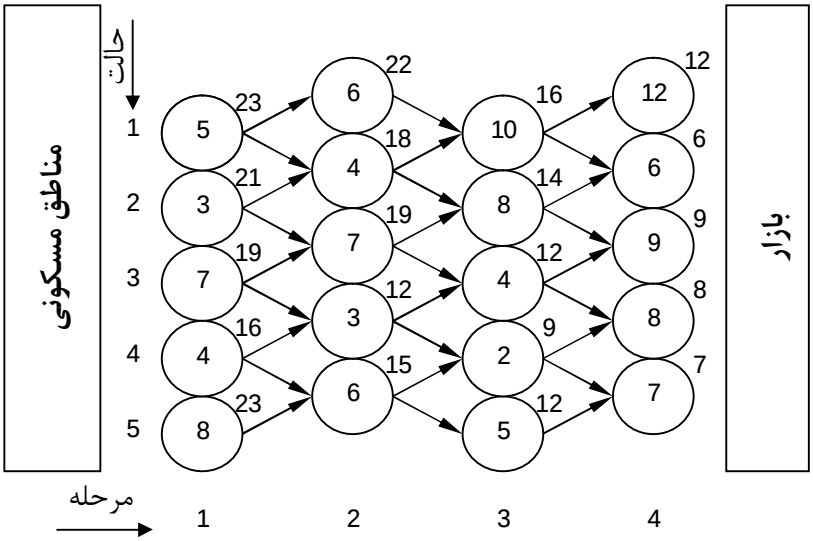
در گام بعد به مرحله ۲ می‌رویم:

$$
\begin{aligned}
22 &= \min\{(6+16)\} \\
18 &= \min\{(4+16),(4+14)\} \\
19 &= \min\{(7+14),(7+12)\} \\
12 &= \min\{(3+12),(3+9)\} \\
15 &= \min\{(6+9),(6+12)\}
\end{aligned}
$$

و در آخرین گام به مرحله ۱ می‌رویم:

$$
\begin{aligned}
23 &= \min\{(5+22),(5+18)\} \\
21 &= \min\{(3+18),(3+19)\} \\
19 &= \min\{(7+19),(7+12)\} \\
16 &= \min\{(4+12),(4+15)\} \\
23 &= \min\{(8+15)\}
\end{aligned}
$$

در شکل زیر طول بهترین مسیر برای رسیدن به هر یک از تقاطع‌ها را در کنار آن نوشته‌ایم:



همانطور که دیده می‌شود، کمترین زمان برای مسیری به دست آمد که از حالت ۴ در مرحله اول شروع می‌شود. بنابراین برای تعیین مسیر بهینه روابط را دوباره بررسی می‌کنیم تا مسیر بهینه را بیابیم. درنتیجه برای حرکت از مناطق مسکونی به بازار کمترین اتلاف زمان، برابر ۱۶ و با حرکت از حالت ۴ مرحله اول به حالت ۴ مرحله دوم، سپس به حالت ۴ مرحله سوم و به حالت ۵ مرحله چهارم به دست می‌آید.

ب) حرکت پیشرو

در حرکت پیشرو نیز همانند حرکت پسرو عمل می‌کنیم؛ با این تفاوت که به جای شروع حرکت از مرحله آخر، از مرحله اول شروع به حرکت کرده و به سمت مرحله آخر می‌رویم.

حرکت را از مرحله اول شروع می‌کنیم و به سوی مرحله چهارم حرکت می‌کنیم. در مرحله اول مقدار زمان توقف در هر یک از ۵ تقاطع به ترتیب ۵ و ۳ و ۷ و ۴ و ۸ می‌باشد. درگام بعدی برای رفتن به مرحله ۲ باید کمترین زمان ممکن برای رسیدن به مقصد را به این صورت به دست آوریم:

$$11 = \min\{(5+6)\}$$
$$7 = \min\{(5+4),(3+4)\}$$
$$10 = \min\{(3+7),(7+7)\}$$
$$7 = \min\{(7+3),(4+3)\}$$
$$11 = \min\{(4+6),(8+6)\}$$

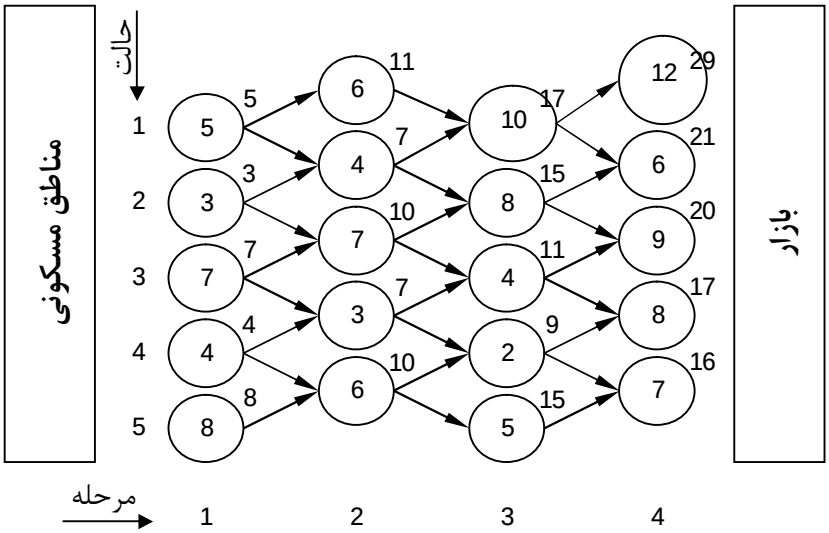
در گام بعد به مرحله ۳ می‌رویم:

$$17=\min\{(11+10),(7+10)\}$$
$$15=\min\{(7+8),(10+8)\}$$
$$11=\min\{(10+4),(7+4)\}$$
$$9=\min\{(7+2),(11+2)\}$$
$$16=\min\{(11+5)\}$$

و در آخرین گام به مرحله ۴ می‌رویم:

$$29=\min\{(17+12)\}$$
$$21=\min\{(17+6),(15+6)\}$$
$$20=\min\{(15+9),(11+9)\}$$
$$17=\min\{(11+8),(9+8)\}$$
$$16=\min\{(9+7),(16+7)\}$$

در شکل زیر طول بهترین مسیر برای رسیدن به هر یک از تقاطع‌ها را در کنار آن نوشته‌ایم:



همانطور که دیده می‌شود، در این روش نیز مسیر بهینه همانند حرکت پسرو به دست آمد.

نکته ۱: در حرکت پیشرو و پسرو، جواب نهایی یعنی مقدار بهینه و مسیرهای بهینه، یکسان است.

نکته ۲: در حرکت پسرو، خروجی‌های هر حالت و در حرکت پیشرو، ورودی‌های هر حالت مجموعه تصمیمات مجاز را مشخص می‌کنند.

نکته ۳: در حرکت پسرو، معیار انتخاب مسیر، طول مسیر بهینه از هر حالت تا مقصد است؛ در حالی که در حرکت پیشرو معیار انتخاب ، طول مسیر بهینه از مبدا تا حالتی است که در آن قرار داریم.

درحالت کلی اگر بدون شکل بخواهیم مسأله‌ای را حل کنیم، باید روابط بازگشتی، مرحله‌ها و حالت‌ها را بنویسیم. رابطه بازگشتی با توجه به نوع حرکت، یعنی پیشرو و یا پسرو بودن آن، نوشته می‌شود.

۳-۵- رابطه بازگشتی برای حرکت پسرو

فرض کنید در مرحله k و در یک حالت دلخواه مثلا حالت S_k باشیم. می‌خواهیم مسیر بهینه از گره S_k به گره مقصد را پیدا کنیم. طبیعی‌ترین راه اینست که کلیه مسیرهای موجود، از گره S_k به گره مقصد را بررسی کنیم و پس از پیدا کردن اندازه هر مسیر و مقایسه بین آن‌ها، کوتاه‌ترین مسیر را انتخاب کنیم. به این روش شمارش کامل گویند.

تعریف‌های زیر را در نظر بگیرید:

حالت در مرحله k: S_k

طول مسیر بهینه از حالت S_k مرحله k تا مقصد: $U_k(S_k)$

(توجه کنید که نوع حرکت، پسرو است.)

مجموعه تصمیمات مجاز در حالت S_k مرحله k: D_k

(کلیه کمان‌هایی که از گره خارج می‌شوند.)

در حرکت پسرو، حالت مرحله بعدی، تابعی است از حالت فعلی و تصمیم مجازی که گرفته می‌شود. یعنی:

$$S_{j+1} = g\left(S_j, d_j\right) \quad j = k, \mathbf{K}, n-1$$

برای شمارش کامل داریم:

$$U_k(S_k)=\min_{\substack{d_i\in D_i\\ S_{j+1}=g(S_j,d_j)\\ i=k,\mathbf{K},n\\ j=K,\mathbf{K},n-1}}\begin{Bmatrix} f_k(S_k,d_k)\\ +f_{k+1}(S_{k+1},d_{k+1})\\ +\mathbf{K}\\ +f_n(S_n,d_n)\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow U_k(S_k)=\min_{\substack{d_k\in D_k\\ S_{k+1}=g(S_k,d_k)}}\begin{Bmatrix}\{f_k(S_k,d_k)\}\\ +\min\limits_{\substack{d_i\in D_i\\ S_{j+1}=g(S_j,d_j)\\ i=k+1,\mathbf{K},n\\ j=K+1,\mathbf{K},n-1}}\begin{Bmatrix} f_{k+1}(S_{k+1},d_{k+1})\\ +\mathbf{K}\\ +f_n(S_n,d_n)\end{Bmatrix}\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow U_k(S_k)=\min_{\substack{d_k\in D_k\\ S_{k+1}=g(S_k,d_k)}}\{f_k(S_k,d_k)+U_{k+1}(S_{k+1})\}$$

$$k=n,n-1,\mathbf{K},1\quad,\quad U_{n+1}(S_{n+1})=0$$

اگر در مسأله‌ای، طول مسیر از ضرب کمان‌ها به دست بیاید، مثل مسیرهای احتمالی که از ضرب احتمال‌ها به دست می‌آیند؛ قرار می‌دهیم:

$$U_{n+1}(S_{n+1})=1$$

۳-۶- رابطه بازگشتی برای حرکت پیشرو

اگر حرکت به صورت پیشرو باشد، شروع آن از مرحله اول است و طی آن طول مسیر بهینه از مبدا تا هر گره در هرحالت از هر مرحله را به دست می‌آوریم. بنابراین ورودی‌های به هر گره، مجموعه تصمیمات مجاز را مشخص می‌کند. همچنین، در طول مسیر، در هر گره‌ای که قرار گرفتیم؛ طول تمام مسیرهایی که از مبدا شروع شده و به آن گره ختم می‌شود را به دست آورده و با هم مقایسه می‌کنیم:

S_k : حالت در مرحله k

$U_k(S_k)$: طول مسیر بهینه از مبدا تا حالت S_k مرحله k

(توجه کنید که نوع حرکت، پیشرو است.)

D_k : مجموعه تصمیمات مجاز در حالت S_k مرحله k

(کلیه کمان‌هایی که به گره وارد می‌شوند.)

در حرکت پیشرو، حالت مرحله قبلی، تابعی است از حالت فعلی و تصمیم مجازی که گرفته می‌شود. ولی برای این نوع از حرکت، نوع نوشتن محدودیتها متفاوت است. یعنی:

$$S_{j-1} = g\left(S_j, d_j\right) \quad j = 2, \mathbf{K}, k$$

برای شمارش کامل داریم:

$$U_k\left(S_k\right) = \min_{\substack{d_i \in D_i \\ S_{j-1} = h\left(s_j, d_j\right) \\ i=1,2,\mathbf{K},k \\ j=2,3,\ldots,k}} \begin{Bmatrix} f_1\left(S_1, d_1\right) \\ + f_2\left(S_2, d_2\right) \\ + \mathbf{K} \\ + f_k\left(S_k, d_k\right) \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow U_k\left(S_k\right) = \min_{\substack{d_k \in D_k \\ S_{k-1} = h\left(S_k, d_k\right)}} \begin{Bmatrix} \min_{\substack{d_i \in D_i \\ S_{j-1} = h\left(S_j, d_j\right) \\ i=1,\mathbf{K},k-1 \\ j=2,\mathbf{K},k-1}} \begin{Bmatrix} f_1\left(S_1, d_1\right) \\ + \mathbf{K} \\ + f_{k-1}\left(S_{k-1}, d_{k-1}\right) \end{Bmatrix} \\ + f_k\left(S_k, d_k\right) \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow U_k\left(S_k\right) = \min_{\substack{d_k \in D_k \\ S_{k-1} = h\left(S_k, d_k\right) \\ k=1,\mathbf{K},n \\ U_0\left(S_0\right)=0}} \begin{Bmatrix} f_k\left(S_k, d_k\right) \\ + U_{k-1}\left(S_{k-1}\right) \end{Bmatrix}$$

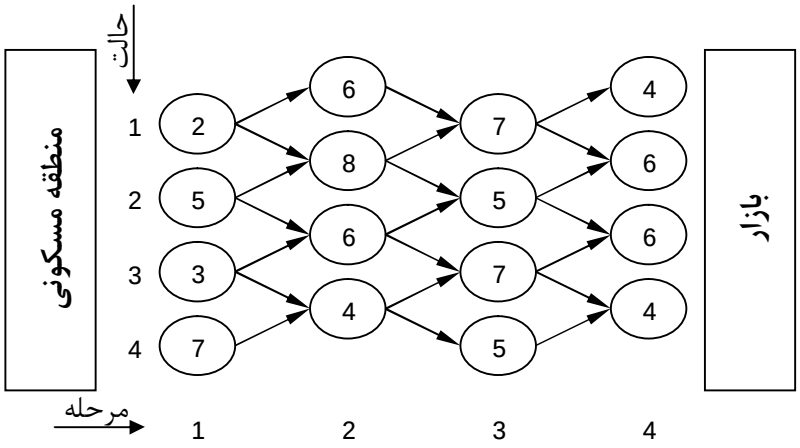
و درحالت ضرب کمان‌ها:

$$U_0\left(S_0\right) = 1$$

۳-۷- دو مثال با دو نوع حرکت

مثال اول:

می‌خواهیم یک نمونه کوچکتر از حرکت بین منطقه مسکونی و بازار را با استفاده از فرمول حل کنیم. شکل زیر را در نظر بگیرید:



حرکت پسرو

با استفاده از فرمول برای حرکت پسرو، داریم:

$$U_5(S_5)=0$$

و برای مرحله چهارم داریم:

$$\left|\begin{array}{l} U_4(S_4=1)=\min\{f_4(S_4,d_4)+U_5(S_5)\}=4 \\ U_4(S_4=2)=6 \\ U_4(S_4=3)=6 \\ U_4(S_4=4)=4 \end{array}\right.$$

$k=4$

S_4	$U_4(S_4)$
1	4
2	6
3	6
4	4

برای مرحله سوم داریم:

$k=3$

S_3 \ d_3	$f_3(S_3,d_3)+U_4(S_4)$		$U_3(S_3)$	d_3^*
	حرکت بالا	حرکت پایین		
1	$7+4=11$	$7+6=13$	11	بالا
2	$5+6=11$	$5+6=11$	11	بالا یا پایین
3	$7+6=13$	$7+4=11$	11	پایین
4	$5+4=9$	–	9	بالا

برای مرحله دوم داریم:

$k=2$

S_2 \ d_2	$f_2(S_2,d_2)+U_3(S_3)$		$U_2(S_2)$	d_2^*
	حرکت بالا	حرکت پایین		
1	–	$6+11=17$	17	پایین
2	$8+11=19$	$8+11=19$	19	بالا یا پایین
3	$6+11=17$	$6+11=17$	17	بالا یا پایین
4	$4+11=15$	$4+9=13$	13	پایین

و برای مرحله اول، داریم:

$k=1$

S_1 \ d_1	$f_1(S_1,d_1)+U_2(S_2)$		$U_1(S_1)$	d_1^*
	حرکت بالا	حرکت پایین		
1	$2+17=19$	$2+19=21$	19	بالا
2	$5+19=24$	$5+17=22$	22	پایین
3	$3+17=20$	$3+13=16$	16	پایین
4	$7+13=20$	–	20	بالا

بنابراین طول کوتاهترین مسیر از منطقه مسکونی به منطقه بازار برابر ۱۶ می‌باشد. برای تعیین مسیر بهینه از آخرین جدول شروع می‌کنیم و با توجه به این که مقدار بهینه از کدام مسیر نتیجه شده، هر گام حرکت را مشخص می‌کنیم:

$$3 \to 4 \to 4 \to 4$$

حرکت پیشرو

برای حرکت پیشرو به این صورت عمل می‌کنیم:

$$U_0(S_0)=0$$

و برای مرحله اول داریم:

$$\begin{cases} U_1(S_1=1)=\min\{f_1(S_1,d_1)+U_0(S_0)\}=2 \\ U_1(S_1=2)=5 \\ U_1(S_1=3)=3 \\ Uv(S_1=4)=7 \end{cases}$$

$k=1$

S_1	$U_1(S_1)$
1	2
2	5
3	3
4	7

برای مرحله دوم داریم:

$k=2$

S_2 \ d_2	$f_2(S_2,d_2)+U_1(S_1)$		$U_2(S_2)$	d_2^*
	حرکت بالا	حرکت پایین		
1	$2+6=8$	–	8	بالا
2	$5+8=13$	$2+8=10$	10	پایین
3	$3+6=9$	$5+6=11$	9	بالا
4	$7+4=11$	$3+4=7$	7	پایین

برای مرحله سوم داریم:

$k=3$

S_3 \ d_3	$f_3(S_3,d_3)+U_2(S_2)$		$U_3(S_3)$	d_3^*
	حرکت بالا	حرکت پایین		
1	$10+7=17$	$8+7=15$	15	پایین
2	$9+5=14$	$10+5=15$	14	بالا
3	$7+7=14$	$9+7=16$	14	بالا
4	–	$7+5=12$	12	پایین

و برای مرحله چهارم، داریم:

$k=4$

S_4 \ d_4	$f_4(S_4,d_4)+U_3(S_3)$ حرکت بالا	$f_4(S_4,d_4)+U_3(S_3)$ حرکت پایین	$U_4(S_4)$	d_4^*
1	$15+4=19$	–	19	بالا
2	$14+6=20$	$15+6=21$	20	بالا
3	$14+6=20$	$14+6=20$	20	بالا یا پایین
4	$12+4=16$	$14+4=18$	16	بالا

دیده می‌شود که در این روش نیز جواب برابر با روش قبل به دست آمده است.

نکته: در مثال قبل، اگر بخواهیم از قسمت خاصی از منطقه مسکونی حرکت کنیم، باید طول مسیر بهینه از آن نقطه را تا بازار بیابیم. از آنجا که پس از نوشتن جداول در روش پسرو، برای تعیین مسیر از آخرین جدول شروع می‌کنیم. با استفاده از حرکت پسرو می‌توانیم از نقطه خاص مورد نظر در مبدا به سمت مقصد و در طول مسیر بهینه حرکت کنیم. برعکس اگر بخواهیم به منطقه خاصی از بازار وارد شویم، باید از حرکت پیشرو استفاده کنیم. در مثال فوق اگر بخواهیم از حالت ۲ مرحله ۱ شروع کنیم، طول مسیر بهینه ۲۲ می‌باشد و اگر بخواهیم به حالت ۲ مرحله ۴ وارد شویم طول مسیر بهینه ۲۰ می‌باشد.

مثال دوم:

می‌خواهیم ۱۴ یخچال را بین ۴ فروشگاه تقسیم کنیم. می‌خواهیم بدانیم با توجه به جدول زیر، چگونه یخچال‌ها توزیع شود که حداکثر درآمد را داشته باشیم:

درآمد حاصل از توزیع یخچال‌ها به فروشگاه‌ها

فروشگاه / تعداد	اول	دوم	سوم	چهارم
0	0	0	0	0
1	10	8	10	9
2	18	18	20	20
3	–	28	22	32
4	–	40	30	45
5	–	–	38	55
6	–	–	45	–

قدم اول تعریف مرحله است. فروشگاه‌ها را به عنوان مرحله‌ها در نظر می‌گیریم. حرکت مناسب هم پسرو و هم پیشرو می‌باشد. حرکت پسرو را در نظر می‌گیریم. حالت باید به گونه‌ای تعریف شود که بتوان در هر حالت تصمیمات مجاز را مشخص نمود. بنابراین می‌توان تعداد یخچال‌های باقیمانده برای فروشگاه‌های kام تا ۴ام را به عنوان حالت در نظر گرفت.

حرکت پسرو

با توجه به این که هدف حداکثر کردن درآمد است داریم:

$$U_k(S_k) = \max_{\substack{d_k \in D_k \\ S_{k+1} = g(S_k, d_k) \\ k = k, \mathbf{K}, 1 \\ U_5(S_5) = 0}} \left\{ f_k(S_k, d_k) + U_{k+1}(S_{k+1}) \right\}$$

باید توجه داشته باشیم که تخصیص به فروشگاه چهارم، زمانی اتفاق می‌افتد که ما به سه فروشگاه قبلی، تخصیص‌هایی داده باشیم. بنابراین، حداقل تعداد یخچالی که می‌توان به فروشگاه چهارم اختصاص داد، برابر است با ۲ چون:

فروشگاه	حداکثر تعداد تخصیص
اول	2
دوم	4
سوم	6
مجموع	12

و حداکثر تعداد یخچال قابل تخصیص به فروشگاه چهارم، طبق جدول داده‌ها برابر ۵ است. پس جدول مرحله چهارم را به صورت زیر رسم می‌کنیم:

$k=4$

S_4	$U_4(S_4)$	d_4^*
2	20	2
3	32	3
4	45	4
5	55	5

برای مرحله سوم، توجه کنید که تصمیمات ۰، ۱ و۲ جزء تصمیمات مجاز نیستند؛ زیرا که کل تقاضای سایر فروشگاه‌ها ۱۱ عدد یخچال است. حالا با هم جدول را پر می‌کنیم:

اگر سه یخچال، به فروشگاه سوم بدهیم، از یخچال‌های باقیمانده حداکثر پنج تا را می‌توانیم به فروشگاه چهارم اختصاص بدهیم. بنابراین باتخصیص ۵ به فروشگاه چهارم، درآمد ۵۵ و با تخصیص ۳ به فروشگاه سوم درآمد ۲۲ را داریم. توجه کنید که حالت‌های ۶، ۷ و۸ جزء تخصیص‌های مجاز برای فروشگاه ۴ نیست. بنابراین در ستون اول، تنها سطر اول مقدار می‌پذیرد. بقیه سطرها و ستون‌ها را نیز به همین صورت پر می‌کنیم. در نهایت، جدول مرحله سوم به این شکل است:

$k=3$

S_3 \ d_3	$f_3(S_3,d_3)+U_4(S_4)$				$U_3(S_3)$	d_3^*
	3	4	5	6		
8	$22+55$	$30+45$	$38+32$	$45+20$	77	3
9	–	$30+55$	$38+45$	$45+32$	85	4
10	–	–	$38+55$	$45+45$	93	5
11	–	–	–	$45+55$	100	6

جدول مرحله دوم نیز به این ترتیب است:

$k=2$

S_2 \ d_2	$f_2(S_2,d_2)+U_3(S_3)$				$U_2(S_2)$	d_2^*
	1	2	3	4		
12	$8+100$	$18+93$	$28+85$	$40+77$	117	4
13	–	$18+100$	$28+93$	$40+85$	125	4
14	–	–	$28+100$	$40+93$	133	4

در مرحله اول، چون حداکثر تقاضای فروشگاه‌های ۲، ۳ و ۴ بیش از ۱۴ است، پس می‌توان به فروشگاه ۱ چیزی نداد. بنابراین صفر جزء تصمیمات مجاز فروشگاه ۱ است و برای جدول مرحله اول داریم:

$k=1$

S_1 \ d_1	$f_1(S_1,d_1)+U_2(S_2)$			$U_1(S_1)$	d_1^*
	0	1	2		
14	$0+133$	$10+125$	$18+117$	135	1 یا 2

بنابراین، حداکثر عایدی تخصیص یخچال‌ها به فروشگاه‌ها، ۱۳۵ است که در نتیجه با توجه به جدول‌های فوق، داریم:

فروشگاه		1	2	3	4
تعداد تخصیص	روش اول	1	4	4	5
	روش دوم	2	4	3	5

درآمد حاصل از روش اول توزیع $=10+40+30+55=135$

درآمد حاصل از روش دوم توزیع $=18+40+22+55=135$

حرکت پیشرو

همین مثال را با حرکت پیشرو حل می‌کنیم. در حرکت پیشرو، حالت را تعداد یخچال‌های توزیع شده بین فروشگاه‌های اول تا kام (شامل فروشگاه مرحله kام) در نظر می‌گیریم:

$$U_k(S_k)=\max_{\substack{d_k\in D_k\\ S_{k-1}=g(S_k,d_k)\\ k=1,\mathbf{K},4\\ U_0(S_0)=0}}\left\{f_k(S_k,d_k)+U_{k+1}(S_{k-1})\right\}$$

$k=1$

S_1	$U_1(S_1)$	d_1^*
0	0	0
1	10	1
2	18	2

برای $k=2$ حداقل حالت، برابر است با ۳ چون مجموع تخصیص‌های بعدی حداکثر ۱۱ می‌باشد.

$k=2$

S_2 \ d_2	$f_2(S_2,d_2)+U_1(S_1)$				$U_2(S_2)$	d_2^*
	1	2	3	4		
3	$8+18$	$18+10$	$28+0$	–	28	2 یا 3
4	–	$18+18$	$28+10$	$40+0$	40	4
5	–	–	$28+18$	$40+10$	50	4
6	–	–	–	$40+18$	58	4

حداقل تخصیص برای فروشگاه سوم، ۳ تا است. بنابراین:

$k=3$

S_3 \ d_3	$f_3(S_3,d_3)+U_2(S_2)$				$U_3(S_3)$	d_3^*
	3	4	5	6		
9	$22+58$	$30+50$	$38+40$	$45+28$	80	4 یا 4
10	–	$30+58$	$38+50$	$45+40$	88	3 یا 5
11	–	–	$38+58$	$45+50$	96	5
12	–	–	–	$45+58$	103	6

$k=4$

S_4 \ d_4	$f_4(S_4,d_4)+U_3(S_3)$				$U_4(S_4)$	d_4^*
	2	3	4	5		
14	$20+103$	$32+96$	$45+88$	$55+80$	135	5

حداکثر سود عایدی در حرکت پسرو و پیشرو با هم مساوی و برابر با ۱۳۵ است.

۳-۸- تنزیل

فرض کنید شرکت برق برای تامین برق ۶ سال آتی نیروگاه‌هایی احداث می‌کند، با این شرط که هزینه مینیمم شده و جوابگوی نیاز مصرف کنندگان نیز باشد. در ضمن در هر سال حداکثر ۳ نیروگاه میتوان احداث کرد و اگر در سالی نیروگاهی ایجاد نکنیم، هزینه ثا بت وجود ندارد، در غیر این صورت یک هزینه ثابت ۲ میلیون دلاری نیز باید منظور شود. جدول زیر هزینه و تقاضای تجمعی برای نیروگاه در ۶ سال آینده را نشان می‌دهد:

هزینه هر نیروگاه (میلیون دلار)	تقاضای تجمعی در پایان سال (نیروگاه)	سال
۵۴	۱	۸۶
۵۶	۲	۸۷
۵۸	۴	۸۸
۵۷	۶	۸۹
۵۵	۷	۹۰
۵۲	۸	۹۱

با حل مسأله با روش پسرو یا پیشرو، چنین جوابی خواهیم داشت:

حداقل هزینه = ۴۴۵ میلیون دلار

سیاست بهینه:

سال	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱
تعداد نیروگاه	۳	۳	۰	۰	۱	۱

در این مثال می‌توان هدف را یافتن تعداد ساخت بهینه با کمترین هزینه و با در نظر گرفتن ارزش فعلی پول قرار داد. به عبارت ساده‌تر، این موضوع بدین معنی است که ارزش یک دلاری که امروز دریافت می‌شود، بیش از یک دلاری است که در سال بعد دریافت می‌شود. زیرا یک دلار امروز می‌تواند برای دریافت سود اضافی در طول سال سرمایه‌گذاری شود.

ضریب تنزیل یک دوره‌ای b را به عنوان ارزش فعلی یک دلاری که یک دوره بعد دریافت می‌شود، تعریف می‌کنیم. اگر نرخ سود برای هر دوره با i نشان داده شود، در این صورت ارزش هر یک دلاری که در هر دوره سرمایه‌گذاری شود در پایان دوره به $1+i$ می‌رسد.

برای مشاهده رابطه بین ضریب تنزیل b و نرخ سود i این سوال را مطرح می‌کنیم که برای دریافت یک دلار در دوره بعد، چقدر باید در دوره فعلی سرمایه‌گذاری شود؟

واضح است که این مقدار از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$i+1=1/b$$

به عبارت دیگر $b = 1/_{1+i}$. اگر در حال حاضر یک دلار با نرخ سود i برای n دوره بعد سرمایه‌گذاری کنیم و سود نیز به صورت مرکب باشد؛ در این صورت در پایان n دوره، ارزش تجمعی آن برابر با $(1+i)^n$ می‌شود. بنابراین ارزش فعلی هر یک دلاری که n دوره بعد دریافت می‌شود، برابر است با $\frac{1}{(1+i)^n}$ و یا b^n

.

مفهوم تنزیل به سادگی قابل آمیختن با رابطه برگشتی پسرو برنامه‌ریزی پویا می‌باشد. زیرا در هر دوره (مرحله) یک برگشت داریم که ممکن است بخواهیم آن را با ضریب تنزیل دوره‌ای نزول دهیم. رابطه برگشتی برای چنین مسأله‌هایی به صورت زیر می‌باشد:

$$U_k(S_k)=\min_{\substack{d_i\in D_i\\ S_{j+1}=g(S_j,d_j)\\ i=k,\mathbf{K},n\\ j=K,\mathbf{K},n-1}}\left\{\begin{array}{l} f_k(S_k,d_k)\\ +b\,f_{k+1}(S_{k+1},d_{k+1})\\ +\mathbf{K}\\ +b^{n-k}f_n(S_n,d_n)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow U_k(S_k)=\min_{\substack{d_k\in D_k\\ S_{k+1}=g(S_k,d_k)}}\{f_k(S_k,d_k)\}$$

$$+\min_{\substack{d_i\in D_i\\ S_{j+1}=g(S_j,d_j)\\ i=k+1,\mathbf{K},n\\ j=k+1,\mathbf{K},n-1}} b\left\{\begin{array}{l} f_{k+1}(S_{k+1},d_{k+1})\\ +\mathbf{K}\\ +b^{n-k-1}f_n(S_n,d_n)\end{array}\right\}$$

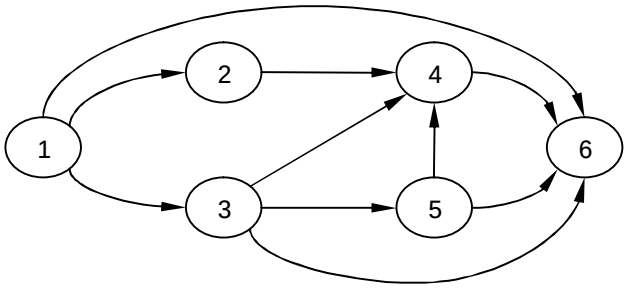
$$\Rightarrow\begin{cases} U_k(S_k)=\min\limits_{\substack{d_k\in D_k\\ S_{k+1}=g(S_k,d_k)}}\left\{\begin{array}{l} f_k(S_k,d_k)\\ +bU_{k+1}(S_{k+1})\end{array}\right\}\\ \\ k=n,n-1,\mathbf{K},1\\ U_{\mathrm{n}+1}(S_{n+1})=0\end{cases}$$

۳-۹- شبکه‌ها

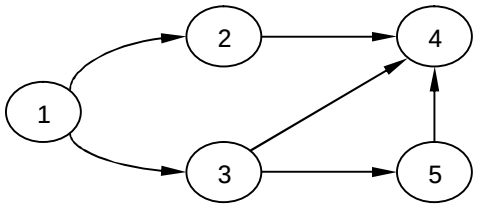
یک شبکه از چند گره و کمان‌هایی که آن گره‌ها را به هم متصل می‌کند تشکیل شده است. شبکه‌ها انواع مختلف دارند؛ شبکه‌های با حلقه و بدون حلقه. شبکه با حلقه شبکه‌ای است که در آن بتوان بعد از چند حرکت در جهت کمان‌ها، از یک گره دوباره به همان گره برسیم.

۳-۹-۱- شبکه‌های بدون حلقه

برای تعیین تعداد مرحله‌ها وحالت‌ها، کار را از گره‌هایی که ورودی داشته، اما خروجی نداشته باشند، آغاز می‌کنیم و گره‌ها و کمان‌های وارد شده به آنها را حذف می‌کنیم. به عنوان مثال شبکه زیر را در نظر بگیرید.



اولین گره‌ای که ورودی دارد، اما خروجی ندارد، گره ۶ می‌باشد. لذا گره ۶ تنها گره آخرین مرحله خواهد بود. با حذف آن گره و کمان‌های وارد به آن، شبکه زیر حاصل می‌شود:



حال گره‌ای که ورودی دارد، اما خروجی ندارد، گره ۴ است؛ در نتیجه گره ۴ تنها گره مرحله ماقبل آخر خواهد بود. کار بر روی سایر گره‌ها را نیز به همین صورت ادامه می‌دهیم تا به آخرین گره موجود برسیم.

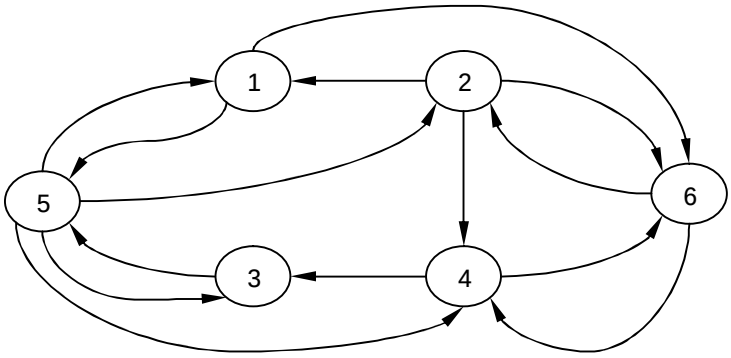
۳-۹-۲- شبکه‌های دارای حلقه

باید در نظر داشته باشیم که خود این شبکه‌ها نیز به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱. حلقه با طول منفی
۲. حلقه بدون طول منفی

افتادن در حلقه با طول منفی، تابع هدف را منفی‌تر می‌کند و به سمت $-\infty$ می‌برد. برای حل مسأله‌های دارای حلقه به روش برنامه‌ریزی پویا، به این صورت عمل می‌کنیم:

مرحله را برای این مسأله‌ها، حداکثر تعداد گره‌های واسطه در نظر می‌گیریم. به عنوان مثال شبکه زیر را در نظر بگیرید:

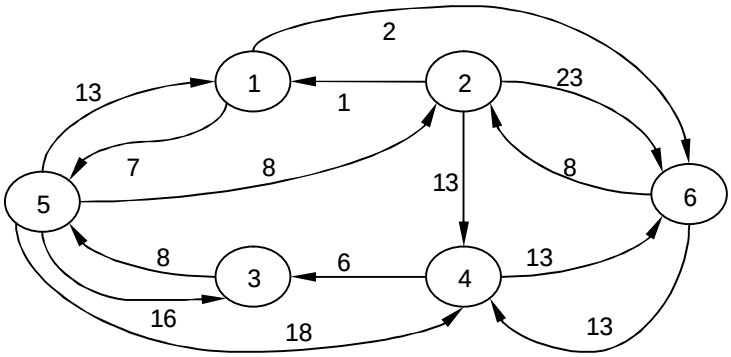


برای رفتن از گره ۱ به گره ۶ می‌توان مستقیما از ۱ به ۶ رفت و یا این که از ۱ به ۵ و از ۵ به ۴ و از ۴ به ۶ رفت. که در حالت دوم ۲ گره واسطه داریم.

یافتن کوتاه‌ترین مسیر یکی از مسأله‌های مهمی است که در شبکه‌ها مطرح می‌شود. هرگاه گره مقصد معلوم باشد، از حرکت پسرو و هرگاه گره مبدا معلوم باشد، از حرکت پیشرو استفاده می‌شود. با استفاده از یک مثال روش حل را توضیح می‌دهیم.

مثال ۱:

در شبکه زیر، با استفاده از حرکت پیشرو، طول کوتاهترین مسیر از گره ۱ به سایر گره‌ها را بیابید. طول کمان‌ها بر روی آنها نوشته شده است.



شبکه بالا، یک شبکه دارای حلقه است. با کنترل مسیر ۵-۱-۲-۵ این مورد مشخص می‌شود.

حرکت: پیشرو

مرحله: داشتن حداکثر n گره واسطه بین دو نقطه در مرحله nام

$V_n(j)=$ طول مسیر بهینه از گره ۱ به گره j مشروط بر این که حداکثر n گره واسطه داشته باشیم.

$d_{ij}=$ طول کمان از گره i به گره j

رابطه بازگشتی:

$$V_n(j)=\min_i\{d_{ij}+V_{n-1}(i)\} \qquad n=1,2,\mathbf{K}$$

بنابراین به عنوان مثال $V_0(i)$ مقدار فاصله بدون گره واسطه بین گره ۱ و گره i را نشان می‌دهد و $V_1(i)$ مقدار فاصله بهینه بین گره ۱ و گره i را برای مسیرهایی با حداکثر یک واسطه نشان می‌دهد.

برای شروع کار، یک جدول از d_{ij}ها می‌نویسیم که در آن مبدا را با i و مقصد را با j نمایش می‌دهیم. در خانه‌هایی که کمانی وجود ندارد، باید مقدار ∞ را اختصاص داد.

سپس در سمت راست جدول یک ستون اضافه می‌کنیم و در آن $V_0(i)$ را می‌نویسیم که این مقدار فاصله بین گره ۱ تا گره i را با حداکثر ۰ گره واسطه نشان می‌دهد.

در مرحله بعد یک سطر جدید در پایین جدول برای $V_1(j)$ ایجاد می‌کنیم. این سطر، مقدار بهینه فاصله بین گره ۱ تا گره j را با حداکثر ۱ گره واسطه نشان می‌دهد. با توجه به رابطه بازگشتی، برای بدست آوردن مقدار هر یک از $V_1(j)$ ها، به ازای هر j کمترین مقدار حاصل جمع $V_0(i)$ و d_{ij} را به ازای تمام i ها به دست می‌آوریم که این مقدار نشان دهنده کمترین طول مسیر از گره ۱ به گره i و سپس به گره j است. در واقع در این مرحله $V_0(i)$ را به طور ستونی با ستون k ام جدول از - به جمع می‌کنیم و کمترین مقدار آن را $V_1(j)$ می‌نامیم. یعنی:

$$V_1(j)=\min_i\{V_0(i)+d_{ij}\}$$

$$\Rightarrow\left|\begin{array}{l}
V_1(1)=\min_i\{V_0(i)+d_{i1}\}=0\\
V_1(2)=\min_i\{V_0(i)+d_{i2}\}=\min_i\{7+8,2+8\}=10\\
V_1(3)=\min_i\{V_0(i)+d_{i3}\}=\min_i\{16+7\}=23\\
V_1(4)=\min_i\{V_0(i)+d_{i4}\}=\min_i\{18+7,13+2\}=15\\
V_1(5)=\min_i\{V_0(i)+d_{i5}\}=\min_i\{7+0,0+7\}=7\\
V_1(6)=\min_i\{V_0(i)+d_{i6}\}=\min_i\{2+0,0+2\}=2
\end{array}\right.$$

در مرحله بعد $V_1(j)$ را به ستون $V_1(i)$ منتقل می‌کنیم و عملیات فوق را ادامه می‌دهیم تا جایی که جواب بهتر نشود.

d_{ij}		j						$V_0(i)$	$V_1(i)$	$V_2(i)$
		1	2	3	4	5	6			
i	1	0	∞	∞	∞	7	2	0	0	0
	2	1	0	∞	13	∞	23	∞	10	10
	3	∞	∞	0	∞	8	∞	∞	23	21
	4	∞	∞	6	0	∞	13	∞	15	15
	5	13	8	16	18	0	∞	7	7	7
	6	∞	8	∞	13	∞	0	2	2	2
$V_1(j)$		0	10	23	15	7	2			
$V_2(j)$		0	10	21	15	7	2			
$V_3(j)$		0	10	21	15	7	2			

پس از محاسبه $V_3(j)$ مشاهده می‌شود که بهبودی نسبت به $V_2(j)$ حاصل نشده است. نتیجه به دست آمده، با توجه به جدول عبارت است از:

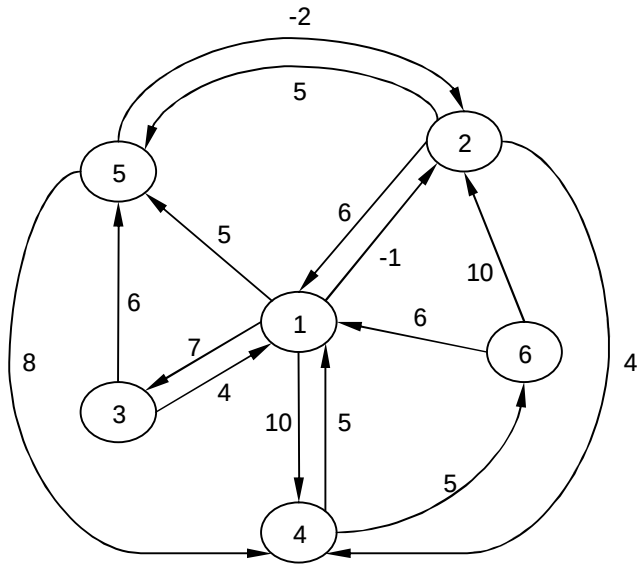
مسیر بهینه از گره ۱ به گره ۲ با طول ۱۰ است و به ترتیب از گره‌های ۱ و ۶ و ۲ عبور می‌کند.

مسیر بهینه از گره ۱ به گره ۳ با طول ۲۱ است و به ترتیب از گره‌های ۱ و ۶ و ۴ و ۳ عبور می‌کند.

و به همین ترتیب...

مثال ۲:

در شبکه زیر، با استفاده از حرکت پسرو، طول کوتاهترین مسیر از هر گره به گره ۳ را بیابید.



واضح است که این شبکه، یک شبکه دارای حلقه است. در تعیین مرحله برای این مسأله، گره‌هایی که به طور مستقیم با گره ۳ ارتباط دارند، در مرحله اول، گره‌هایی که حداکثر با یک گره واسطه با گره ۳ مرتبط هستند، در مرحله دوم و به طور کلی مسیرهایی که حداکثر با m گره واسطه دو گره را به هم مرتبط می‌کنند، در مرحله $m+1$ بررسی می‌شوند. به این ترتیب، اگر شبکه n گره داشته باشد، آخرین مرحله، مرحله $n-1$ ام خواهد بود که در آن $n-2$ گره واسطه خواهیم داشت. همچنین چون گره مقصد مشخص است، حرکت مناسب حرکت پسرو می‌باشد و برای یافتن مسیر بهینه، باید خروجی‌های هر گره مشخص شود.

حرکت: پسرو

مرحله: داشتن حداکثر n گره واسطه بین دو نقطه در مرحله nام

$U_n(i)$ = طول مسیر بهینه از گره i به گره ۳ مشروط بر این که حداکثر n گره واسطه داشته باشیم.

d_{ij} = طول کمان از گره i به گره j

رابطه بازگشتی:

$$U_n(i) = \min_j \left\{ d_{ij} + U_{n-1}(j) \right\} \quad , \quad \mathrm{n} = 1,2,\mathbf{K}$$

مانند مثال قبل، برای استفاده راحت‌تر از فرمول، جدولی به شکل زیر رسم می‌کنیم. با این تفاوت که چون از حرکت پسرو استفاده می‌کنیم، باید برای شروع $U_0(j)$ را در یک سطر جدید در پایین جدول بنویسیم و $U_1(i)$ جدید را در یک ستون جدید در سمت راست جدول محاسبه کنیم. برای بررسی روش کار جدول زیر را مشاهده کنید:

d_{ij}		j						$U_1(i)$	$U_2(i)$	$U_3(i)$
		1	2	3	4	5	6			
i	1	0	-1	7	10	5	∞	7	7	7
	2	6	0	∞	4	5	∞	13	13	13
	3	4	∞	0	∞	6	∞	0	0	0
	4	5	∞	∞	0	∞	5	12	12	12
	5	∞	-2	∞	8	0	∞	∞	11	11
	6	6	10	∞	∞	∞	0	13	13	13
$U_0(j)$		7	∞	0	∞	∞	∞			
$U_1(j)$		7	13	0	12	∞	13			
$U_2(j)$		7	13	0	12	11	13			

وقتی دو ستون متوالی $U_j(i)$ و $U_{j+1}(i)$ به طور کامل برابر شدند، یعنی رابطه بازگشتی بهبودی ایجاد نکرده است و در صورتی که دوباره به کار رود، دوباره همان ستون را ایجاد می‌کند. بنابراین نیازی به ادامه دادن نیست و جواب به دست آمده بهینه است.

۳-۱۰- مسأله‌های احتمالی

تا اینجا ما تنها مسأله‌های قطعی را در نظر گرفتیم. اما وقتی که در یک مسأله برنامه‌ریزی پویا، پدیده‌ای غیرحتمی وجود داشته باشد، یک تصمیم مشخص برای یک حالت از مرحله‌ای از فرآیند، به تنهایی حالت سیستم را در مرحله بعد تعیین نمی‌کند.

در برنامه‌ریزی پویا تحت شرایط غیر حتمی، با فرض این که سیستم در حالت S_k مرحله k و تصمیم فعلی d_k باشد، یک حادثه احتمالی رخ می‌دهد که متغیر تصادفی $\mathring{E}_k$ نشانگر آن است.

به عنوان مثال در مسأله تولید، هنگامی که میزان تقاضا احتمالی است با دانستن موجودی در ابتدای ماه و مشخص شدن میزان تولید در آن ماه، میزان موجودی در ابتدای ماه بعد قطعی نیست. در مسأله‌های احتمالی، حالت، تصادفی است و ما یک شبکه با ساختار ثابت نداریم. در این گونه مسأله‌ها، هدف، بهینه‌سازی امید ریاضی مسیری است که باید طی شود. این بدین معنی است که اگر این برنامه بارها در شرایط ثابت تکرار شود، سیاست مشخص شده، در دراز مدت بهترین سیاست می‌باشد اما ممکن است در کوتاه مدت سیاست مناسبی نباشد.

در مسأله‌های احتمالی، نوع حرکت پسرو است. رابطه برگشتی مسأله‌های احتمالی به این صورت می‌باشد:

$$U_k\left(S_k\right)=\max_{\substack{d_k\in D_k\\ \mathring{S}_{k+1}=g\left(S_k,d_k,\mathring{E}_k\right)}} E\left[f_k\left(S_k,d_k,\mathring{E}_k\right)+U_{k+1}\left(\mathring{S}_{k+1}\right)\right]$$

مثال:

می‌خواهیم برای تولید یک کالای ویژه در دو دوره، برنامه‌ریزی نماییم. موجودی در ابتدای برنامه صفر است و تقاضا به صورت جدول زیر می‌باشد.

دوره ۱		دوره ۲	
تعداد	احتمال	تعداد	احتمال
0	0.25	0	0.6
1	0.75	1	0.4

هزینه تولید یک واحد از این کالا ۲۰ میلیون تومان است که می‌توان در هر دوره به تعداد لازم از آن تولید کرد. قیمت فروش هر واحد از این کالا در دوره اول ۳۰ میلیون تومان و در دوره دوم ۴۰ میلیون تومان می‌باشد. در پایان هر دوره به هر واحد موجود در انبار ۰/۵ میلیون تومان هزینه انبارداری تعلق می‌گیرد و پس از پایان دوره، هر واحد موجود به قیمت حراجی ۱۰ میلیون تومان به فروش می‌رسد. هدف تعیین سیاست بهینه تولید در دراز مدت برای این کالا در دو دوره هرسال است.

روش حل:

با توجه به این که در مسأله‌های احتمالی، حرکت مورد نظر حرکت پسرو می‌باشد، مسأله را حل می‌کنیم:

هر دوره تولید را یک مرحله و حالت S_k را مقدار کالای موجود در ابتدای دوره k در نظر می‌گیریم. بنابراین S_3 مقدار کالایی است که در دوره دوم اضافه آمده و حراج می‌شود که حداکثر مقدار آن ۲ می‌باشد؛ زیرا حداکثر می‌توان ۱ واحد در دوره اول و ۱ واحد در دوره دوم تولید کرد. همچنین S_3 یک متغیر تصادفی است که تابعی است از:

$$S_3 = g\left(S_2, d_2, E_2\right)$$

اولین گام از حرکت پسرو را از مرحله سوم شروع می‌کنیم.

$k = 3$

S_3	$U(S_3)$
0	0
1	10
2	20

در مرحله دوم با توجه به این که حداکثر یک واحد از قبل تولید شده است، S_2 می‌تواند مقادیر 0 و1 را بگیرد. در حالت $S_2 = 1$، از آنجا که تقاضا حداکثر یک واحد است، تولید باید مقدار 0 را بگیرد.

جدول مربوط به مرحله دوم به این شکل است:

$k=2$

S_2		0			1	
d_2		0	1		0	
فروش	تعداد	0	0	1	0	1
	احتمال	1	0.6	0.4	0.6	0.4
S_3		0	1	0	1	0
هزینه	انبار	0	0.5	0	0.5	0
	تولید	0	20	20	0	0
درآمد	فروش	0	0	40	0	40
	$U_3(S_3)$	0	10	0	10	0
سود		0	–10.5	20	9.5	40
سود × احتمال		0	–6.3	8	5.7	16
امید ریاضی سود		0	1.7		21.7	
$U_2(S_2)$		1.7			21.7	

در مرحله اول جدول زیر را رسم کرده و به این صورت پر می‌کنیم:

$k=1$

S_1		0		
d_1		0	1	
فروش	تعداد	0	0	1
	احتمال	1	0.25	0.75
S_2		0	1	0
هزینه	انبار	0	0.5	0
	تولید	0	20	20
درآمد	فروش	0	0	30
	$U_2(S_2)$	1.7	21.7	1.7
سود		1.7	1.2	11.7
سود × احتمال		1.7	0.3	8.775
امید ریاضی سود		1.7	9.075	
$U_1(S_1)$		9.075		

دقت کنید که در جدول‌های بالا، $U_k(S_k)$ برابر است با حداکثر امید ریاضی سود به ازای d_kهای مختلف برای هر S_k خاص و بر اساس آن می‌توانیم تصمیم بگیریم که در هر مرحله در یک حالت (S_k) خاص، کدام تصمیم (d_k) را بگیریم تا امید ریاضی سود بیشتر شود.

نتیجه:

تصمیم بهینه به این صورت است که در مرحله اول که حالت صفر است یک واحد تولید کنیم. پس از طی دوره اول تقاضای این دوره معلوم می‌شود. اگر تقاضای دوره اول صفر بود، تصمیم بهینه برای دوره بعد، نداشتن تولید است و اگر کالای تولید شده در دوره اول به فروش رفت، در مرحله دوم تصمیم بهینه، تولید یک واحد است.

۳-۱۱- مسائل

۱. مسئله احداث نیروگاه در جزوه را با استفاده از حرکت پیشرو حل نمایید.(در هر سال حداکثر ۳ نیروگاه می‌توان احداث نمود.)

۲. فرض کنید شرکت برق برای تامین برق ۴ سال آتی باید نیروگاه‌هایی احداث کند با این شرط که هزینه مینیمم شده و تعداد آنها جوابگوی نیازمصرف کنندگان باشد. در ضمن اگر در سالی نیروگاهی ایجاد نکنیم هزینه ثابتی وجود ندارد در غیر این صورت یک هزینه ثابت ۳ میلیون دلاری منظور می‌شود. با حرکت پیشرو سیاست بهینه را تعیین کنید.

سال	تقاضای تجمعی در پایان سال	هزینه هر نیروگاه (میلیون دلار)
۸۲	۱	۵۸
۸۳	۳	۵۷
۸۴	۵	۵۵
۸۵	۶	۵۳

۳. ۳ وانت توت فرنگی داریم و می‌خواهیم آنها را به ۳ فروشگاه تخصیص دهیم. چگونه وانت ها را بین ۳ فروشگاه توزیع کنیم تا حداکثر سود عاید شود. نوع حرکت پسرو باشد. مراحل، حالتها و رابطه بازگشتی را مشخص نمایید.

فروشگاه / تعداد وانت	سود مورد انتظار		
	۱	۲	۳
۰	۰	۰	۰
۱	۹	۱۱	۹
۲	۱۵	۱۶	۱۴
۳	۱۶	۱۸	۱۷

۴. شرکتی ۳ پروژه در دست اجرا دارد. با توجه به منابع تخصیص یافته برای پروژه‌ها زمان‌های لازم برای آنها ۳۰، ۴۰ و ۳۶ هفته می‌باشد.مدیریت برای کاهش این زمان‌ها می‌خواهد ۴۰۰۰۰ دلار بودجه اضافی خرج نماید. زمان‌های جدید انجام پروژه‌ها بر حسب بودجه اضافی در جدول آمده است. این بودجه اضافی چگونه هزینه گردد تا بیشترین کاهش را در مجموع زمان پروژه ها سبب شود.(پیشرو)

بودجه اضافی	زمان اجرا		
	پروژه ۱	پروژه ۲	پروژه ۳
۰	۳۰	۴۰	۳۶
۱۰	۲۴	۳۲	۳۰
۲۰	۲۰	۲۶	۲۴
۳۰	۱۶	۲۲	۲۰
۴۰	۱۴	۱۸	۱۸

۵. تقاضای کالایی در تیر و مرداد غیر قطعی و دارای توزیع زیر است. هر عدد از کالا به قیمت ۲۰۰۰ تومان در ماه‌های تیر و مرداد به فروش می‌رسد. لازم است که سفارش در ابتدای هر ماه صورت بگیرد تا در ابتدای همان ماه تحویل گردد. به هر واحد کالای موجود در انبار در آخر هر ماه ۲۰۰ تومان هزینه نگهداری تعلق می‌گیرد. موجودی اولیه صفر و موجودی اول شهریور هر عدد ۵۰۰ تومان به فروش خواهد رسید. قیمت خرید برابر ۱۰۰۰ ت برای هر واحد می‌باشد. مطلوب است تعیین سیاست بهینه.

ماه	تیر		مرداد		
تعداد تقاضا	۰	۱	۰	۱	۲
احتمال	۰/۸	۰/۲	۰/۷	۰/۲	۰/۱

۶. می‌خواهیم برای تولید یک کالای ویژه در دو دوره برنامه‌ریزی کنیم. موجودی در ابتدای برنامه صفر است و تقاضا به صورت جدول زیر است. هزینه تولید یک واحد از این کالا ۳۰ میلیون تومان است که می‌توان به تعداد لازم در هر دوره یا دوره بعد ازآن تولید کرد. قیمت فروش هر واحد از این کالا در دوره اول ۴۰ میلیون تومان و در دوره دوم ۳۰ میلیون تومان می‌باشد. در پایان هر دوره به هر واحد موجود در انبار ۰/۵ میلیون تومان هزینه انبار داری تعلق می‌گیرد. پس از پایان دوره هر واحد به قیمت حراجی ۱۵ میلیون تومان به فروش می‌رسد. سیاست بهینه تولید چیست؟

دوره ۲		دوره ۱	
احتمال	تعداد	احتمال	تعداد
۰/۵	۰	۰/۴	۰
۰/۵	۱	۰/۶	۱

منابع

۱. برادلی اس‌پ، هکس آسی و مگننتی تال. ًبرنامه‌ریزی ریاضی کاربردیً. ترجمه ذکائی آشتیانی ه: دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۶۵.

۲. آشنایی با تحقیق در عملیات تألیف : حمدی طه، ترجمه : محمدباقر بازرگان ، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی سال ۱۳۷۵.

۳. آریانژاد م‌ب‌ق و سجادی س‌ج. "تحقیق در عملیات ۲ –ویرایش جدید": مرکز انتشارات دانشگاه علم و صنعت ایران-شماره ۳۶۷، ۱۳۸۶.

۴. آریانژاد م¬ب¬ق و سجادی س¬ج. "برنامه‌ریزی خطی": مرکز انتشارات دانشگاه علم و صنعت ایران، ۱۳۸۵.

۵. تحقیق در عملیات – برنامه ریزی خطی تألیف: فردریک س . هیلبر و جرالد ج . لیبرمن، جلد اول ، ترجمه: محمدمدرس و اردوان آصف وزیری ، انتشارات تندر، سال ۱۳۷۰.

۶. برنامه ریزی خطی، تألیف: مختار بازارا ، جان جی. جارویس، حنیف دی . شرالی ، ترجمه: اسماعیل خرم، انتشارات نشر کتاب دانشگاهی سال ۱۳۸۰.

۷. برنامه ریزی خطی (تحقیق در عملیات) به همراه سی دی و راهنمای نرم افزار لینگو، تألیف: واین ال. وینستون، ترجمه: رضا زنجیرانی فراهانی، نسرین عسگری، محمد مدرس یزدی. انتشارات ترمه، سال ۱۳۷۶.

۸. قاسمی‌طاری ف، فاطمی قمی مت. "توالی عملیات و زمانبندی": انتشارات دانشگاه صنعتی شریف، چاپ اول، ۱۳۷۶.

۹. صباغ مس و قاسمی م. "یک راه حل ابتکاری آینده نگر برای مسئله فروشنده دوره گرد نامتقارن": مجله علوم دانشگاه شهید چمران، شماره۱۰ دوره جدید، ۱۳۸۲.

۱۰. صباغ مس و امیری ع. "روش ابتکاری ساخت و بهبود تور مسئله فروشنده دوره گرد نامتقارن": نشریه دانشکده فنی دانشگاه تهران، شماره ۴ دوره جدید، ۱۳۸۵.

11. D. S. Johnson, G. Gutin, L. A. McGeoch, A.Yeo,W. Zhang, and A. Zverovitch. Experimental analysis of heuristics for the ATSP. In G. Gutin and A. Punnen, editors, The Traveling Salesman Problem and its Variations, pages, 369-487. Kluwer Academic Publishers, 2002.

12. G. Reinelt. TSPLIB – A traveling salesman problem library. ORSA Journal on Computing, Vol.3-4, pages, 376–385, 1991. See also http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95./

13. Cirasella, J., Johnson, D.S., McGeoch, L.A. and Zhang W.: The Asymmetric Traveling Salesman Problem: Algorithms, Instance Generators, and Tests. In A.L. Buchsbaum and J. Snoeyink, eds., Algorithm Engineering and Experimentation, Third International Workshop, ALENEX, 2001.

14. Cirasella J, Johnson DS, McGeoch LA, Zhang W. The asymmetric traveling salesman problem: algorithms, instance generators, and tests. ALENEX 2001 Proceedings, Springer Lecture Notes in Computer Science, Vol. 2153, pages, 32–59. Berlin: Springer; 2002 .
15. Tucker, "On Directed Graphs and Integer Programs". IBM Mathematical Research Project Technical Report, Princeton University 1960.
16. Apostol T. M. (1975). Mathematical Analysis, Second Edition, Addison Wesley Publishing Company, Reading Massachusetts, pp. 127-133.
17. Cooper M. W. (1981). A survey of methods for pure nonlinear integer programming. Management Science, 27: pp. 353-361.
18. Burkard, R. E., Dell'Amico, M., & Martello, S. (2009). Assignment problems. Philadelphia: SIAM. ISBN:978-0-898716-63-4.
19. Derigs, U. (1985). The shortest augmenting path method for solving assignment problems-motivation and computational experience. In C. L. Monma, 14 editor, Algorithms and Software for Optimization- part I, volume 4 of Ann. Oper. Res., pp. 57- 102. Baltzer, Basel.
20. Gomory R. E. (1963). An all-integer programming algorithm. In: J.F. Muth and G.L. Thompson, Editors, Industrial Scheduling, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ Chapter 13.
21. Hansen P. (1955). Methods of Nonlinear 0-1 Programming. Ann. Discrete Math., 1979; 5: pp. 53-70.
22. Kuhn, H.W. (1955). The Hungarian method for the assignment problem, Naval Research Logistics quarterly, 2, pp. 83-97 .
23. Kuhn, H.W. (1956).Variants of the Hungarian method for the assignment problem, Naval Research Logistics quarterly, 3, pp. 253-258.
24. Laporte, G. (1992). The traveling salesman problem: An overview of exact and approximate algorithms, European Journal of operational Research 59 pp. 1234-1247.
25. Lawler, E. L., Lenstra, J. K., et al. (1955). The traveling salesman problem, John Wiley and Sons Ltd., Chichester.
26. Lawler E. L. and Bell M. D. (1996). A method for solving discrete optimization problems. Operations Res. 14: pp. 1098-1112.
27. Sabbagh M S. (1983). A general lexicographic partial enumeration algorithm for the solution of integer nonlinear programming problems. Doctor of Science Dissertation, Department of Operations Research, The George Washington University, Washington D.C .
28. Sabbagh M S. (1997). A general lexicographic partial enumeration algorithm for the solution of integer nonlinear programming problems with discrete isotone nondecreasing objective function and constraints. Amirkabir 33: pp. 80-85.
29. Sabbagh, M. S., (2007). "An improved Partial Enumeration Algorithm for Integer Programming Problems". Accepted for publication by Journal of Annals of Operations Research.
30. Sabbagh, M. S., (2007). "A Partial Enumeration Algorithm for Pure Nonlinear Integer Programming". Accepted for publication by Journal of appllied Mathematical Modelling.
31. Sabbagh M S. (2007). A generalized implicit enumeration algorithm for the all integer maximization programming. Accepted for publication by Journal of Industrial Engineering International.
32. Nemhauser, G. & Wolsey, L. (1988), Integer and Combinatorial Optimization, Wiley, New York.